

PARTIE I

Δ Dans cette partie j'utilisais x à la place de π quand je parlais de polynômes.

Q1) Définition d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\exists X P' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $-P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\exists X P' - P'' \in \mathbb{R}_n[X]$.

ϕ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

• Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\phi(\lambda P + Q) = \lambda X(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q)'' = \lambda X(\lambda P' + Q') - (\lambda P'' + Q'') = \lambda(X\lambda P' - P'') + (\lambda X Q' - Q'')$$

$$\phi(\lambda P + Q) = \lambda \phi(P) + \phi(Q).$$

ϕ est linéaire.

Ainsi ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) $\phi(1) = 0$. $\phi(X) = 2X$. $\forall k \in \mathbb{I}2, n\mathbb{I}$, $\phi(X^k) = 2kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} = 2kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$.

A deux autres près : $\forall k \in \mathbb{I}0, n\mathbb{I}$, $\phi(X^k) = 2kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$.

Alors la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

Q2) a) La matrice de ϕ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure donc les valeurs propres de ϕ sont les éléments de la diagonale de cette matrice.

Ainsi $S_\phi = \{2k; k \in \mathbb{I}0, n\mathbb{I}\}$. Alors nous pouvons : $\forall k \in \mathbb{I}0, n\mathbb{I}$, $\lambda P = 2k$.

ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

Alors ϕ est diagonalisable.

b) ϕ a $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$;

néanmoins les sous-espaces propres de ϕ sont des droites vectorielles.

Soit par conséquent en $\mathbb{I}0, n\mathbb{I}$ l'endomorphisme un ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui agit de la

pour-espace propre associée à la valeur propre $\lambda_p = 2p$. $U_p \neq 0 \in R_n(\mathbb{C})$.

Soit $\tilde{D}_p$ le coefficient du terme de plus haut degré de U_p . Posons $H_p = \frac{1}{\tilde{D}_p} U_p$.

H_p est un polynôme unitaire de $R_n(\mathbb{C})$ et H_p est encore un élément de $S := \mathcal{P}(\mathbb{C}, 2p)$.

Ainsi $2XH'_p - H''_p = 4pH_p$; $H''_p - 2XH'_p + 4pH_p = 0 \in R_n(\mathbb{C})$.

Soit $\tilde{H}_p$ un second élément unitaire de $R_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $\tilde{H}_p'' - 2X\tilde{H}_p' + 4p\tilde{H}_p = 0 \in R_n(\mathbb{C})$.

$\tilde{H}_p$ appartient au pour-espace propre de ϕ associée à la valeur propre $2p$.

(car $2X\tilde{H}_p' - \tilde{H}_p'' = 4p\tilde{H}_p$) qui est à la droite vectorielle engendrée par U_p ou par H_p .

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\tilde{H}_p = \lambda H_p$. Le coefficient du terme de plus haut degré de $\tilde{H}_p$ est

le même que le coefficient du terme de plus haut degré de λH_p , ainsi $\lambda = \lambda \lambda$, $\lambda = 1$.

Ainsi $\tilde{H}_p = H_p$.

Pour tout p dans $\mathbb{I}_0, n \mathbb{I}$, il existe un et un seul polynôme unitaire H_p vérifiant $H_p'' - 2XH'_p + 4pH_p = 0$.

c) Soit $p \in \mathbb{I}_0, n \mathbb{I}$. $H_p \neq 0 \in R_n(\mathbb{C})$. Posons $k = \deg H_p$. Soit a_k le coefficient de X^k dans H_p . $a_k \neq 0$.

Le coefficient de X^k dans $H_p'' - 2XH'_p + 4pH_p$ est: $0 = 2ka_k + 4pa_k$.

Ainsi $a_k \neq 0$ et $2(p-k)a_k = 0$. Alors $p-k=0$, $k=p$.

Pour tout p dans $\mathbb{I}_0, n \mathbb{I}$, H_p est de degré p .

d) $\exists$ (un) $\lambda /$ à toutes les qualités pour être H_0 (resp. H_1). $H_0 = 1$ et $H_1 = X$.

$$\phi(X^2) = 4X^2 - 6 = 4\left(X^2 - \frac{3}{2}\right) = 4\left(X^2 - \frac{1}{2}\right) = \phi(X^2) = \phi\left(X^2 - \frac{1}{2}\right) !!$$

$$X^2 - \frac{1}{2} \text{ est unitaire et } \phi\left(X^2 - \frac{1}{2}\right) = 4\left(X^2 - \frac{1}{2}\right). \quad \phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{Ainsi } H_2 = X^2 - \frac{1}{2}.$$

$$\phi(X^3) = 6X^3 - 6X. \quad \forall a \in \mathbb{R}, \phi(X^3 + aX) = 6X^3 - 6X + 6aX = 6\left(X^3 + \left(\frac{a}{3} - 1\right)X\right)$$

$$\text{Admettant zéro que } \forall a \in \mathbb{R}, a = \frac{3}{2} - 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Alors $\phi(x^3 - \frac{3}{2}x) = 6(x^3 - \frac{3}{2}x)$ et $x^3 - \frac{3}{2}x$ est une polynôme unitaire.

Ainsi $H_3 = x^3 - \frac{3}{2}x$.

Again ? $\phi(x^4) = 8x^4 - 12x^2$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\phi(x^4 + \alpha x^2 + \beta) = 8x^4 - 12x^2 + (4x^2 - 2) = 8(x^4 + \frac{\alpha-3}{2}x^2 - \frac{\beta}{4})$.

$\frac{\alpha-3}{2} = \alpha$ et $-\frac{\beta}{4} = \beta \Leftrightarrow \alpha = -3$ et $\beta = \frac{3}{4}$.

Alors $x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$ est unitaire et $\phi(x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}) = 8(x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4})$.

Ainsi $H_4 = x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$... $H_5 = x^5 - 5x^3 + \frac{15}{4}$; $H_6 = x^6 - \frac{15}{2}x^4 + \frac{45}{4}x^2 - \frac{15}{8}$...

Soit $p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$. Notons b_p (resp. c_p) le coefficient de x^{p-1} (resp. x^{p-2}) dans H_p .

Le coefficient de x^{p-2} (resp. x^{p-3}) dans H'_p est : $(p-1)b_p$ (resp. $(p-2)c_p$).

Le coefficient de x^{p-1} (resp. x^{p-2}) dans xH'_p est : $(p-1)b_p$ (resp. $(p-2)c_p$).

Le coefficient de x^{p-1} (resp. x^{p-2}) dans H''_p est : 0 (resp. $p(p-1)$).

Alors le coefficient de x^{p-1} (resp. x^{p-2}) dans $H''_p - 2xH'_p + 4pH_p$ est :

$0 - 2(p-1)b_p + 4p b_p$ (resp. $p(p-1) - 2(p-2)c_p + 4p c_p$); c'est

à dire $2b_p$ (resp. $p(p-1) + 4c_p$).

Comme $H''_p - 2xH'_p + 4pH_p = 0$ ($\mathbb{R}_n[X]$) : $2b_p = 0$ et $p(p-1) + 4c_p = 0$

Alors $b_p = 0$ et $c_p = -\frac{p(p-1)}{4}$.

On vérifie alors que le coefficient de x^{2-1} dans $H_2 = x^2 - \frac{1}{2}$ est 0 et

que le coefficient de x^{2-2} dans H_2 est $-\frac{1}{2} = -\frac{2(2-1)}{4}$. Ainsi le

résultat précédent vaut pour $p=2$.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, le coefficient de x^{p-1} dans H_p est 0 et le coefficient de x^{p-2} dans H_p est $-p(p-1)$.

Q3 Définition d'un produit scalaire sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$.

Considérons cette question par deux petits lemmes.

Lemme 1. $\forall P \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x)e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (P(x)e^{-x^2}) = 0.$

Soit $P \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$. Si par conséquent le résultat est vrai.

Supposons que P ne soit pas constant. Soit k le degré de P et a_k le coefficient de x^k dans P . $a_k \neq 0$.

$$\text{Alors } |P(x)e^{-x^2}| \sim |a_k| |x|^k e^{-x^2} = |a_k| (x^2)^{\frac{k}{2}} e^{-x^2}$$

$$\text{Alors, par croissance comparée : } \lim_{x \rightarrow +\infty} |P(x)e^{-x^2}| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |P(x)e^{-x^2}| = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x)e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (P(x)e^{-x^2}) = 0.$$

Lemme 2 $\forall S \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-t^2} dt$ converge.

$\varphi: t \mapsto S(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et d'après le Lemme 1, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^k \varphi(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^k \varphi(t)) = 0$.

Alors $\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [A, +\infty[, 0 \leq |t^k \varphi(t)| \leq 1$.

$\exists B \in \mathbb{R}^+, \forall t \in]-\infty, -B], 0 \leq |t^k \varphi(t)| \leq 1$.

$\forall t \in [A, +\infty[, 0 \leq |\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^k}$ et $\forall t \in]-\infty, -B], 0 \leq |\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^k}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^k} dt$ et de $\int_{-\infty}^{-B} \frac{1}{t^k} dt$ et la positivité de $|\varphi|$ donnent

la convergence de $\int_A^B |\varphi(t)| dt$ et de $\int_{-B}^B |\varphi(t)| dt$ donc la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt$ est absolument convergente donc convergente. Ceci achève la démonstration du Lemme 2.

a) Soit $(p, q) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R})$. $p, q \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ d'après le lemme 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} (pq)(t)e^{-t} dt$ est convergente.

Pour tout couple (p, q) d'éléments de $\mathcal{R}_n(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)q(t)e^{-t} dt$ existe.

b) Soit $(p, q, r) \in (\mathcal{R}_n(\mathbb{R}))^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

toutes les intégrales convergent

$$\bullet \langle \lambda p + q, r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda p + q)(t) r(t) e^{-t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda p(t) r(t) + q(t) r(t)) e^{-t} dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) r(t) e^{-t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) r(t) e^{-t} dt$$

$$\langle \lambda p + q, r \rangle = \lambda \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle.$$

$$\bullet \langle q, p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)p(t)e^{-t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)q(t)e^{-t} dt = \langle p, q \rangle; \quad \langle q, p \rangle = \langle p, q \rangle.$$

$$\bullet \forall r \in \mathcal{R}, r(t)e^{-t} \geq 0 \text{ d'après } \int_{-\infty}^{+\infty} (r(t))^2 e^{-t} dt \geq 0; \quad \langle p, p \rangle \geq 0.$$

Supposons $\langle p, p \rangle = 0$. $t \mapsto (p(t))^2 e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Comme } \int_{-\infty}^{+\infty} (p(t))^2 e^{-t} dt = 0 : \forall t \in \mathbb{R}, (p(t))^2 e^{-t} = 0; \quad \forall t \in \mathbb{R}, (p(t))^2 = 0; \quad \forall t \in \mathbb{R}, p(t) = 0$$

$$\langle p, p \rangle = 0 \Rightarrow p = 0_{\mathcal{R}_n(\mathbb{R})}.$$

Ceci suffit pour dire que : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{R}_n(\mathbb{R})$.

c) Soit $(p, q) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R})^2$. $\psi = t \mapsto p'(t)e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \psi'(t) = p''(t)e^{-t} - 2t p'(t)e^{-t} = -q'(t)p(t)e^{-t}$.

$$\text{La dérivée de } t \mapsto p'(t)e^{-t} \text{ est : } t \mapsto -q'(t)p(t)e^{-t}.$$

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_A^B q'(t)p(t)e^{-t} dt = - \int_A^B \psi'(t)q(t) dt. \text{ une intégration par parties donne alors :}$$

$$\int_A^B q'(t)p(t)e^{-t} dt = - [\psi(t)q(t)]_A^B + \int_A^B \psi(t)q'(t) dt$$

$$\int_A^B q'(t)p(t)e^{-t} dt = -p'(B)q(B)e^{-B} + p'(A)q(A)e^{-A} + \int_A^B p'(t)q'(t)e^{-t} dt.$$

$\phi(p), q, p'$ et q' sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{it} q(t)e^{-it} dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} p'(t)q'(t)e^{-it} dt$ convergent.

$p'q' \in \mathbb{R}[X]$ donc, d'après le théorème 1, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A (p'(t)q'(t)e^{-it}) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A (p'(t)q'(t)e^{-it}) dt = 0$.

En faisant $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$ dans la dernière égalité de la page précédente.

$$\text{on obtient : } \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)q(t)e^{-it} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} p'(t)q'(t)e^{-it} dt.$$

Ainsi $\forall (\phi, q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle \phi(p), q \rangle = \langle p', q' \rangle$... nous nous en souviendrons.

soit $(p, q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. $\langle \phi(p), q \rangle = \langle p', q' \rangle$ et $\langle \phi(q), p \rangle = \langle q', p' \rangle$.

$$\text{Avec } \langle \phi(p), q \rangle = \langle p', q' \rangle = \langle q', p' \rangle = \langle \phi(q), p \rangle = \langle p, \phi(q) \rangle.$$

$\forall (p, q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle \phi(p), q \rangle = \langle p, \phi(q) \rangle$; ϕ est une transformation symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) ϕ est symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

soit $(p, q) \in \mathbb{C}_0, n D'$ tel que $p \neq q$.

$\text{SEP}(\phi, \lambda_p)$ et $\text{SEP}(\phi, \lambda_q)$ sont orthogonaux, $H_p \in \text{SEP}(\phi, \lambda_p)$ et $H_q \in \text{SEP}(\phi, \lambda_q)$;

ainsi H_p et H_q sont orthogonaux.

$$\underline{\forall (p, q) \in \mathbb{C}_0, n D', p \neq q \Rightarrow \langle H_p, H_q \rangle = 0}.$$

Soit $p \in \mathbb{C}_0, n D'$.

$(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une famille d'éléments non nuls et deux à deux orthogonaux de $\mathbb{R}_p[X]$.

Avec $(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une famille libre de cardinal $p+1$ de $\mathbb{R}_p[X]$ qui est de dimension $p+1$. $(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

Il en est de même $(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_p[X]$.

Pour tout p dans $\mathbb{C}_0, n D', (H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_p[X]$.

En particulier $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

soit $p \in \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_D$. H_p orthogonal à $H_0, H_1, \dots, H_{p-1}$.

H_p orthogonal à $\text{Vect}(H_0, H_1, \dots, H_{p-1}) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Ainsi $\forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \langle H_p, \varphi \rangle = 0$.

$\forall p \in \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_D, \forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \langle H_p, \varphi \rangle = 0$

Q4 Etude des racines des polynômes H_p ($1 \leq p \leq n$).

Soit $p \in \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_D$.

$j \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) e^{-t^2} dt = \langle H_p, j \rangle = 0;$$

Si $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}$ car elle est continue et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$.

Or on voit $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ n'est pas la fonction nulle, alors $t \mapsto H_p(t) e^{-t^2}$ ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}$.

$$\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, H_p(t_1) e^{-t_1^2} > 0 \text{ et } H_p(t_2) e^{-t_2^2} < 0.$$

H_p est continue sur $\mathbb{R}$, $H_p(t_1) > 0$ et $H_p(t_2) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe c dans l'intervalle ouvert défini par t_1 et t_2 tel que $H_p(c) = 0$.

H_p admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Si H_p n'admet que des racines d'ordre pair dans $\mathbb{R}$, H_p garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas.

Alors H_p admet au moins une racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}$.

H_p s'annule en changeant de signe au d.

H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

b) $a_1, a_2, \dots, a_m$ sont m racines d'ordre impair de H_p dans $\mathbb{R}$.
 Alors $H_p P_m = H_p (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_m)$ n'est que des racines d'ordre pair dans $\mathbb{R}$. Ainsi $H_p P_m$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

Supposons $m < p$. Alors $\langle H_p, P_m \rangle = 0$ car $P_m \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} dt = 0$.

Mais $t \mapsto H_p(t) P_m(t) e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} dt = 0.$$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, H_p(t) P_m(t) e^{-t^2} = 0$; $\forall t \in \mathbb{R}, H_p(t) P_m(t) = 0$. $H_p P_m = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Ceci donne $H_p = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou $P_m = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ce qui n'est pas.

Pour conclure $m = p$.

c) P_m divise H_p ($a_1, \dots, a_m$ sont m racines de H_p , donc à deux à deux distinctes) et

$\deg P_m = p = \deg H_p$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, H_p = \lambda P_m = \lambda P_p$.

Comme H_p et P_p sont unitaires : $H_p = P_p = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_p)$

H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

QS Relations entre les polynômes H_p ($2 \leq p \leq n$).

a) Supposons que $p \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{D}$. Soit $\varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X]$.

$$\langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t H_{p-1}(t) \varphi(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{p-1}(t) t \varphi(t) e^{-t^2} dt = \langle H_{p-1}, X \varphi \rangle.$$

Or $X \varphi \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$ donc $\langle H_{p-1}, X \varphi \rangle = 0$.

$\varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X] \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$; $\langle H_p, \varphi \rangle = 0$. Alors $\langle H_p - X H_{p-1}, \varphi \rangle = \langle H_p, \varphi \rangle - \langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$.

$\forall \varphi \in \mathbb{R}_{p-3}[X], \langle X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$ et $\langle H_p - X H_{p-1}, \varphi \rangle = 0$ ceci pour tout $p \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{D}$.

H_p et $X H_{p-1}$ sont deux polynômes unitaires de degré p .

Ainsi $H_p - X H_{p-1}$ est un élément de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

$$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p, \quad H_p - X H_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i H_i.$$

Supposons $p \geq 3$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, p-3 \leq k, \quad \langle H_p - X H_{p-1}, H_k \rangle = 0 \quad \text{d'après la propriété 1.}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, p-3 \leq k, 0 = \left\langle \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i H_i, H_k \right\rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \underbrace{\langle H_i, H_k \rangle}_p = \alpha_k \|H_k\|^2$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, p-3 \leq k, \alpha_k \|H_k\|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \|H_k\|^2 \neq 0 \quad \langle H_i, H_k \rangle = 0 \text{ si } i \neq k$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, p-3 \leq k, \alpha_k = 0.$$

$$\text{Alors} \quad H_p - X H_{p-1} = \alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1}$$

$$\text{Notons que ceci vaut aussi pour } p=2 \text{ car } H_2 - X H_1 = \sum_{i=0}^2 \alpha_i H_i.$$

$$\text{Le coefficient de } X^{p-1} \text{ dans } H_p - X H_{p-1} \text{ est : } 0 - 0 = 0$$

$$\text{Le coefficient de } X^{p-2} \text{ dans } H_p - X H_{p-1} \text{ est : } -\frac{p(p-1)}{2} - \left(-\frac{(p-1)(p-2)}{2} \right);$$

$$\text{c'est à dire : } -\frac{p-1}{2} (p - (p-1)) = -\frac{p-1}{2}.$$

$\uparrow$ coeff de
 X^{p-2} dans H_p

$\uparrow$ coeff de
 X^{p-2} dans H_{p-1}

$$\text{Le coefficient de } X^{p-1} \text{ dans } \alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1} \text{ est : } \alpha_{p-1}.$$

$$\text{Le coefficient de } X^{p-2} \text{ dans } \alpha_{p-2} H_{p-2} + \alpha_{p-1} H_{p-1} \text{ est : } \alpha_{p-2} + \alpha_{p-1} \cdot 0 = \alpha_{p-2}.$$

$$\text{Ainsi} \quad \alpha_{p-1} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{p-2} = -\frac{p-1}{2}. \quad H_p - X H_{p-1} = -\frac{p-1}{2} H_{p-2}.$$

$$\text{ceci suffit pour dire que : } \underline{\forall p \in \mathbb{Z}, n \geq 1, 2 H_p - (X H_{p-1} + (p-1) H_{p-2}) = 0}.$$

b) Soit $p \in \mathbb{Z}, n \geq 1$. Soit $\Phi \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$. Soit S un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $S' = \Phi$.

$$\text{Alors } S \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \text{ et } \langle H'_p, \Phi \rangle = \langle H'_p, S' \rangle \stackrel{p \geq 1}{=} \langle \Phi(H_p), S \rangle = 2p \langle H_p, S \rangle \stackrel{S \in \mathbb{R}_{p-1}[X]}{=} 0$$

$$\underline{\forall p \in \mathbb{Z}, n \geq 1, \forall \Phi \in \mathbb{R}_{p-2}[X], \langle H'_p, \Phi \rangle = 0.}$$

$$\text{Soit } p \in \mathbb{Z}, n \geq 1. \quad H'_p - p H_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[X] \quad (\text{le coeff. de } X^{p-1} \text{ dans } H'_p \text{ est } p) \quad \text{et}$$

$$\forall \Phi \in \mathbb{R}_{p-2}[X], \quad \langle H'_p - p H_{p-1}, \Phi \rangle = \langle H'_p, \Phi \rangle - p \langle H_{p-1}, \Phi \rangle = 0 - p \cdot 0 = 0.$$

$$H'_p - p H_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-2}[X] \cap \mathbb{R}_{p-2}[X]^\perp. \quad H'_p - p H_{p-1} = 0. \quad H'_p = p H_{p-1}. \quad \text{ceci vaut}$$

$$\text{également pour } p=1. \quad \text{Alors } \underline{\forall p \in \mathbb{Z}, n \geq 1, H'_p = p H_{p-1}.}$$

PARTIE II

Q1 a) $(x_1, x_2) \mapsto x_2 - x_1$ et de classe B' et strictement positive sur U (c'est une fonction polynômiale) et f_2 et de classe B' sur $\mathbb{R}_+^2$; par composition $(x_1, x_2) \mapsto f_2(x_2 - x_1)$ et de classe B' sur U . Et puis $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$ et de classe B' sur U (fonction polynômiale). Alors F est de classe B' sur U comme combinaison linéaire de fonctions de classe B' sur U .

F est de classe B' sur l'ouvert U .

$$\forall x = (x_1, x_2) \in U, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = 2x_1 + \frac{2}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) = 2x_2 - \frac{2}{x_2 - x_1}.$$

$$\text{Soit } x = (x_1, x_2) \in U. \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2 - x_1} = -x_2 = x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ 1 = -x_1(-x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$x_1 < x_2$

L'unique point de U où la dérivée des particularisations de F est nulle est : $a = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$b) F(a) = F(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 2 \ln \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - 2 \ln \sqrt{2} = 1 - \ln 2.$$

$$\underline{F(a) = 1 - \ln 2.}$$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ sont de classe B^1 sur U comme fonctions rationnelles donc F est de

classe B^2 sur U .

$$\forall x = (x_1, x_2) \in U, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x) = 2 + \frac{2}{(x_2 - x_1)^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x) = 2 + \frac{2}{(x_2 - x_1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = -\frac{2}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$\text{Puis on } r = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(a).$$

$$r = t = 2 + \frac{2}{(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 2 + \frac{2}{(\sqrt{2})^2} = 3 \quad \text{et} \quad s = -\frac{2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = -3. \quad rt - s^2 = 8 \quad \text{et} \quad r > 0.$$

le cours permet de dire que F admet a un minimum local car U est ouvert.

Q2 Etude du point critique de F dans le cas général.

a) p est dérivable et non nulle en tout point de $\mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}$

$|P|$ est dérivable et strictement positive en tout point de $\mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}$.

Donc $\ln |P|$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}, \ln |P(x)| = \sum_{j=1}^n \ln |x - a_j|. \text{ En dérivant il vient:}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_n\}, \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - a_j}.$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D}. \lim_{x \rightarrow a_i} \left(\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} \right) = \lim_{x \rightarrow a_i} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x - a_j} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D}, \lim_{x \rightarrow a_i} \left(\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j}.$$

b) Soit $u \in \mathbb{N}$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ n'ayant droit à un point, soit a un élément de I et soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f admet une dérivée n fois à a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n) \quad (\text{au voisinage de } a) \text{ ou}$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n) \quad (\text{au voisinage de } 0).$$

Rappelons que $f^{(n)}(a)$ existe signifie que f est $n-1$ fois dérivable au voisinage de a et que $f^{(n-1)}$ est dérivable en a ... au moins pour $n \geq 1$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$.

P et P' sont dans $\mathcal{B}^n$ sur $\mathbb{R}$.

$$P(a_i) = 0$$

$$\text{Ainsi: } P(a_i + t) = P(a_i) + t P'(a_i) + \frac{t^2}{2} P''(a_i) + o(t^2) = t P'(a_i) + \frac{t^2}{2} P''(a_i) + o(t^2) \text{ ou } 0 \dots$$

$$P'(a_i + t) = P'(a_i) + t P''(a_i) + o(t) \text{ ou } 0.$$

$$t P'(a_i + t) = t P'(a_i) + t^2 P''(a_i) + o(t^2) \text{ ou } 0. \text{ Ainsi:}$$

$$g(t) = t P(a_i + t) = t^2 P'(a_i) + o(t^2) \text{ ou } 0,$$

$$\text{et } f(t) = t P'(a_i + t) - P(a_i + t) = t P'(a_i) + t^2 P''(a_i) - t P'(a_i) - \frac{t^2}{2} P''(a_i) + o(t^2) \text{ ou } 0.$$

Finalement $f(t) = \frac{t^2}{2} P''(a_i) + o(t^2)$ et $g(t) = t^2 P'(a_i) + o(t^2)$ en 0.

Notons une simple de P donc $P'(a_i) \neq 0$; $g(t) \sim_{t \rightarrow 0} t^2 P'(a_i)$.

$f(t) = \frac{t^2}{2} P''(a_i) + t^2 \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

$$\frac{f(t)}{g(t)} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2} P''(a_i) + t^2 \varepsilon(t)}{t^2 P'(a_i)} = \frac{1}{P'(a_i)} \left(\frac{1}{2} P''(a_i) + \varepsilon(t) \right).$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{P'(a_i)} \left(\frac{1}{2} P''(a_i) + \varepsilon(t) \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{P''(a_i)}{P'(a_i)}$ car P'' et ε tendent vers 0.

Alors $\frac{1}{2} \frac{P''(a_i)}{P'(a_i)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t P'(a_i + t) - P(a_i + t)}{t P(a_i + t)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{P'(a_i + t)}{P(a_i + t)} - \frac{1}{t} \right)$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow a_i} \left(\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} \right) = \lim_{x \rightarrow a_i} \left(\frac{P'(a_i + (x - a_i))}{P(a_i + (x - a_i))} - \frac{1}{(x - a_i)} \right) = \frac{1}{2} \frac{P''(a_i)}{P'(a_i)}$

car $(x - a_i) \rightarrow 0$!
 $x \rightarrow a_i$

$\forall x \in (I, x] , \lim_{x \rightarrow a_i} \left(\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} \right) = \frac{1}{2} \frac{P''(a_i)}{P'(a_i)}$

c) Il résulte de a) et b) et de l'unicité de la limite d'une fonction

que : $\forall x \in (I, x] , \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$

Retenons ce résultat à quelques lignes. Soit P_i le quotient de P par $x - a_i$.

$\forall x \in \mathbb{R}, P_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - a_j)$. Alors la formule de c) permet d'écrire :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n\}, \frac{P_i'(x)}{P_i(x)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x - a_j}$. Ainsi $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P_i'(a_i)}{P_i(a_i)}$

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - a_i) P_i(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = P_i(x) + (x - a_i) P_i'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}, P''(x) = 2P_i'(x) + (x - a_i) P_i''(x)$

Alors $P'(a_i) = P_i(a_i)$ et $P''(a_i) = 2P_i'(a_i)$. $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P_i'(a_i)}{P_i(a_i)} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$

⚠ Attention avec $\blacktriangle$ et $\blacktriangledown$ x représente un élément de $\mathbb{R}^n$!!!

$\blacktriangle$ Notion d'abac que F est de classe B^1 doit $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$ tel que $i < j$.

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j - x_i$ est de classe B^1 (fonction polynomiale) et sa Jacobienne est positive sur U . Comme h est de classe B^1 sur $\mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto h(x_j - x_i)$ est de classe B^1 sur U .

Par combinaison linéaire, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\substack{(i,j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n} \\ i < j}} h(x_j - x_i)$ est de classe B^1 sur U .

Comme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ est de classe B^1 (fonction polynomiale) on peut dire que:

F est de classe B^1 sur U ouvert U comme somme de deux fonctions de classe B^1 sur U .

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de U et soit k un élément de $\overline{1, n}$.

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{\substack{(i,j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n} \\ i < j}} h(x_j - x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} h(x_k - x_i) - \sum_{j=k+1}^n h(x_j - x_k) + \text{Alas:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = 2x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{x_k - x_i} - \sum_{j=k+1}^n \frac{-1}{x_j - x_k}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = 2x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{x_k - x_i} - \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{x_k - x_j} = 2x_k - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_j}.$$

$$\forall i \in \overline{1, n}, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = 2x_k - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_j}. \quad \blacktriangledown$$

* Dans la suite de la question $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et $P = (x - a_1) \dots (x - a_n)$ *

a est un point critique de $F \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n}, \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n}, 2a_i - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{a_i - a_j} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n}, 2a_i - \frac{2P''(a_i)}{2P'(a_i)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n}, 2a_i P'(a_i) - P''(a_i) = 0.$$

$a = (a_1, \dots, a_n)$ et un point critique de F et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, admet $a_1, a_2, \dots, a_n$ pour racines.

d) • Supposons que $x \mapsto \lambda(xP'(x) - P''(x))$ admette $a_1, a_2, \dots, a_n$ pour racines.

$x \mapsto \lambda(xP'(x) - P''(x))$ est une fonction polynomiale de degré n admet pour racines $a_1, \dots, a_n$.

Ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(xP'(x) - P''(x)) = \lambda \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ car $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

• Réciproquement supposons que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(xP'(x) - P''(x)) = \lambda P(x)$.

Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda(a_i P'(a_i) - P''(a_i)) = \lambda P(a_i) = 0$. $x \mapsto \lambda(xP' - P'')$ admet

$a_1, a_2, \dots, a_n$ pour racines.

Ainsi $a = (a_1, \dots, a_n)$ et un point critique de F et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(xP'(x) - P''(x)) = \lambda P(x)$.

ou $a = (a_1, \dots, a_n)$ et un point critique de F si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(xP' - P'') = \lambda P$

ou $a = (a_1, \dots, a_n)$ et un point critique de F si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \phi(P) = \lambda P$.

• Supposons que $a = (a_1, \dots, a_n)$ et un point critique de F .

$P \neq 0$ et $\phi(P) = \lambda P$; P est un vecteur propre de ϕ .

Alors $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \lambda = \varepsilon P$; mais alors P est un polynôme unitaire de

$\mathbb{R}_n[X]$ tel que $-\varepsilon \lambda P' + P'' + \varepsilon P P' = 0$ d'où $P = H_P$.

En particulier $n = \deg P = \deg H_P = P$; $P = n$. $P = H_n$.

• Réciproquement supposons que $P = H_n$. $-\varepsilon \lambda P' + P'' + \varepsilon P P' = 0$;

$\lambda(xP' - P'') = (\varepsilon \lambda) P$; $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(xP' - P'') = \lambda P$; a et un point critique de F .

Finalement a et un point critique de F si et seulement si $P = H_n$.

Rappelons que H_n admet n racines distinctes. Soit $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ la suite stationnaire associée constituée des racines de H_n .

$P = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ avec $a_1 < \dots < a_n$ et $H_n = \prod_{i=1}^n (x - b_i)$ avec $b_1 < b_2 < \dots < b_n$.

Alors $P = H_n \Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un point critique de F si $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$.

Ainsi F admet un unique point critique le point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ qui est le point strictement voisinable continué des zéros de H_n .

Q3) Nature du point critique de F dans le cas général.

a) Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de U et soit $t \in [0, 1]$.

Soit $i \in \overline{1, n-1}$. $x_i < x_{i+1}$ et $y_i < y_{i+1}$.

Si $t = 0$: $t x_i + (1-t) y_i = y_i < y_{i+1} = t x_{i+1} + (1-t) y_{i+1}$.

Si $t = 1$: $t x_i + (1-t) y_i = x_i < x_{i+1} = t x_{i+1} + (1-t) y_{i+1}$.

Si $t \in]0, 1[$, $t x_i < t x_{i+1}$ et $(1-t) y_i < (1-t) y_{i+1}$ donc $t x_i + (1-t) y_i < t x_{i+1} + (1-t) y_{i+1}$.

Donc pour tout i : $t x_i + (1-t) y_i < t x_{i+1} + (1-t) y_{i+1}$ donc pour tout $i \in \overline{1, n-1}$.

Alors $t x + (1-t) y \in U$.

$\forall (x, y) \in U^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $t x + (1-t) y \in U$. U est convexe.

b) $\phi: x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = 2x \geq 0$.

$\phi: x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soit $i \in \overline{1, n-1}$. Pour $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, $\phi_i(x) = x_i^2$.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de U . Soit $t \in [0, 1]$.

$\phi_i(t x + (1-t) y) = (t x_i + (1-t) y_i)^2 = \phi(t x_i + (1-t) y_i) \leq t \phi(x_i) + (1-t) \phi(y_i)$ car ϕ est convexe.

Ainsi $\phi_i(t x + (1-t) y) \leq t \phi_i(x) + (1-t) \phi_i(y)$.

Cela démontre que ϕ_i est convexe sur U .

Pour tout i dans $\overline{1, n-1}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i^2$ est convexe sur U .

- $\hat{\varphi} : x \mapsto -\ln x$ est concave joindéfinie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{\varphi}''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

$\hat{\varphi} : x \mapsto -\ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$... pas sur $\mathbb{R}!!$

doit $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$ tel que $i < j$.

Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, $\hat{\varphi}_{ij}(x) = -\ln(x_j - x_i) = \hat{\varphi}(x_j - x_i)$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de U . Soit $t \in [0, 1]$.

$$\hat{\varphi}_{ij}(tx + (1-t)y) = \hat{\varphi}(t(x_j - x_i) + (1-t)(y_j - y_i)) = \hat{\varphi}(t(x_j - x_i) + (1-t)(y_j - y_i))$$

$$\hat{\varphi}_{ij}(tx + (1-t)y) \leq t \hat{\varphi}(x_j - x_i) + (1-t) \hat{\varphi}(y_j - y_i) = t \hat{\varphi}_{ij}(x) + (1-t) \hat{\varphi}_{ij}(y).$$

ce qui achève de prouver que $\hat{\varphi}_{ij}$ est concave sur U .

Si $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$ et $i < j$: $(x_1, \dots, x_n) \mapsto -\ln(x_j - x_i)$ est concave sur U .

- Notons que $F = \sum_{i=1}^n \varphi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{\varphi}_{ij}$.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de U . Soit $t \in [0, 1]$.

$$F(tx + (1-t)y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(tx + (1-t)y) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{\varphi}_{ij}(tx + (1-t)y).$$

$$F(tx + (1-t)y) \leq \sum_{i=1}^n (t \varphi_i(x) + (1-t) \varphi_i(y)) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (t \hat{\varphi}_{ij}(x) + (1-t) \hat{\varphi}_{ij}(y))$$

$$F(tx + (1-t)y) \leq t \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{\varphi}_{ij}(x) \right) + (1-t) \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(y) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{\varphi}_{ij}(y) \right)$$

$$F(tx + (1-t)y) \leq t F(x) + (1-t) F(y).$$

F est concave sur U .

$$\square \bullet 0 = (a_1, \dots, a_n) \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

$$\forall t \in [0, 1], \psi(t) = F(x_1 + (1-t)a_1, \dots, x_n + (1-t)a_n).$$

- $\rightarrow$ Pour tout $i \in \overline{1, n}$, $t \mapsto t x_i + (1-t) a_i$ et de plus δ' sur (a_i) choisis de sorte est $t \mapsto x_i - a_i$.
 $\rightarrow \forall t \in \overline{0, 1}$, $(t x_1 + (1-t) a_1, \dots, t x_n + (1-t) a_n) \in U$
 $\rightarrow$ Fais de plus δ' sur U .

Alors $\rightarrow \psi$ est de plus δ' sur (a_i)

$$\rightarrow \forall t \in \overline{0, 1}, \psi'(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(t x + (1-t) a).$$

$$\psi'(0) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0 \text{ car a est un } (\delta!) \text{ point critique de } F.$$

$$\psi(0) = 0.$$

Fatouche

$$\bullet \forall t \in \overline{0, 1}, F(t x + (1-t) a) \leq t F(x) + (1-t) F(a) = t(F(x) - F(a)) + F(a)$$

$$\forall t \in \overline{0, 1}, \psi(t) \leq t(F(x) - F(a)) + \psi(0).$$

$$\forall t \in \overline{0, 1}, \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \leq F(x) - F(a)$$

En faisant tendre t vers 0 il vient $\psi'(0) \leq F(x) - F(a)$ donc $F(x) - F(a) \geq 0$

Finalement $\forall x \in U$, $F(x) \geq F(a)$. Fa donc a 0 un minimum ... a qui ne
 surpasse pas les spécialités des fonctions convexes...

Q4) doit $i \in \overline{1, n-1}$. $2 H_n(y_i) - 2 y_i H_{n-1}(y_i) + (n-1) H_{n-2}(y_i) = 0.$

Donc $H_n(y_i) = \frac{n-1}{2} H_{n-2}(y_i)$. Or $H_{n-2} = \prod_{k=1}^{n-2} (x - y_k)$ et $H_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (x - y_k)$

$$\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} H_{n-2}(y_i) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (y_i - y_k) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \prod_{i=1}^{n-1} (y_i - y_k)$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} \left((-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (y_k - y_i)\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} ((-1)^{n-1} H_{n-1}(y_k))$$

Alors $\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} |(-1)^{n-1} H_{n-1}(y_k)| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} |H_{n-1}(y_k)|$

$$\left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left| \prod_{k=1}^{n-2} H_{n-1}(y_k) \right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left| \prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(y_i) \right|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, notons $\epsilon_1^{(n)}, \epsilon_2^{(n)}, \dots, \epsilon_n^{(n)}$ les racines de H_n .

Posons d'abord: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \alpha_n = \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(\epsilon_i^{(n)}) \right|$

Nous avons montré que: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \alpha_n = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \alpha_{n-1}$

Ainsi $\alpha_3 = \frac{2^2}{2^2} \alpha_2$; $\alpha_4 = \frac{3^3}{2^3} \alpha_3 = \frac{2^2 \times 3^3}{2^{4+3}} \alpha_2$; $\alpha_5 = \frac{4^4}{2^4} \alpha_4 = \frac{2^2 \times 3^3 \times 4^4}{2^{4+3+4}} \alpha_2 \dots$

Notons que $\alpha_2 = |H_2(0)|$ (0 est la seule racine de H_2)

$$\alpha_2 = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

Notons d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \alpha_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k^k}{2^{\sum_{k=1}^{n-1} k}} = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k$

→ Il est clair pour $n=2$.

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$, et démontrons la pour $n+1$.

$$\alpha_{n+1} = \left(\frac{n}{2}\right)^n \alpha_n = \frac{n^n}{2^n} \frac{1}{2^{\sum_{k=1}^{n-1} k}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k = \frac{1}{2^{\sum_{k=1}^n k}} \prod_{k=1}^n k^k \text{ et la récurrence s'achève.}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(\epsilon_i) \right| = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k$

• Soit $i \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Posons $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$. $H_n = (X - a_i) Q_i$

$$H'_n = Q_i + (X - a_i) Q'_i$$

$$H'_n(a_i) = Q_i(a_i). \quad H'_n(a_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (a_j - a_k); \quad |H'_n(a_i)| = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_i - a_j|; \quad |H'_n(a_j)| = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_j - a_k|; \quad \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_j - a_i|$$

$\forall i \in \mathbb{N}, n \geq 1, |H'_n(a_i)| = \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_j - a_i) \right|$

$$\forall i \in \overline{1, n-1}, H'_n(a_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j). \quad \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) = \prod_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j).$$

$$\left| \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) \right| = \left| \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) \right| \times \left| \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \right| \stackrel{\text{à méditer}}{=} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) \right]^2 = \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right]^2.$$

$$\text{Alors } P_n^L = \left| \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) \right|; \quad P_n = \sqrt{\left| \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) \right|}.$$

$$P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) > 0 \quad \text{car } a_j > a_i \text{ si } j > i.$$

$$\underline{P_n = \sqrt{\left| \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) \right|}}.$$

$$\bullet \quad \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) = \prod_{i=1}^n (n H'_n(a_i)) = n^n \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^{n-1} (a_i - y_k) = n^n \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^n (a_i - y_k)$$

$$\prod_{i=1}^n H'_n(a_i) = n^n \prod_{k=1}^{n-1} \left[(-1)^n \prod_{i=1}^n (y_k - a_i) \right] = ((-1)^n)^{n-1} n^n \prod_{k=1}^{n-1} H_n(y_k) = n^n \prod_{k=1}^{n-1} H_n(y_k)$$

(noter que $n(n-1)$ est pair car $(-1)^{n(n-1)} = 1$)

$$\text{Alors } \left| \prod_{i=1}^n H'_n(a_i) \right| = n^n \left| \prod_{k=1}^{n-1} H_n(y_k) \right| = n^n \left| \prod_{k=1}^{n-1} H_n(y_i) \right|. \text{ Ainsi :}$$

$$\underline{P_n^L = n^n \left| \prod_{k=1}^{n-1} H_n(y_i) \right|}.$$

$$\bullet \text{ Alors } P_n^L = n^n \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k$$

$$\text{Rappelons que } P_n \text{ est pairif donc } \underline{P_n = \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{k=1}^{n-1} k^k}.$$

b) $\sum_{i=1}^n a_i$ est le coefficient de x^{n-1} dans H_n c'est donc : 0.

$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ est le coefficient de x^{n-2} dans H_n c'est donc : $-\frac{n(n-1)}{4}$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = -\frac{n(n-1)}{4}$$

Alors $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = 0 - 2 \left(-\frac{n(n-1)}{4} \right) = \frac{n(n-1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$F(a) = \sum_{i=1}^n a_i^4 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(a_j - a_i) = \sum_{i=1}^n a_i^4 - h \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right]^2$$

$$F(a) = \frac{n(n-1)}{2} - \ln P_n^2 = (n-1) - \ln \left(\frac{1}{2^{n(n-1)/2}} \prod_{i=1}^n k_i^2 \right)$$

$$F(a) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \ln 2 - \sum_{k=1}^n k \ln k$$

$$F(a) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \ln 2 - \sum_{k=1}^n k \ln k$$

• Pour $n=2$, $a=(a_1, a_2)$ avec (a_1, a_2) suite croissante des jésus de $H_2 = X^2 - \frac{1}{2}$. Alors $a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

de plus $F(a) = \frac{2(2-1)}{2} + \frac{2(2-1)}{2} \ln 2 - 2 \ln 2 = 1 - \ln 2$.

de plus F admet un minimum absolu en a .

On retrouve les paramètres de l'algorithm de Π 1°.