

PARTIE I

(Q1) a) Notons u la restriction de la fonction $\sin$ à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

u est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u''(x) = -\sin x \leq 0$.

Ainsi u est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. La courbe représentative de u est au-dessus de toutes ses cordes; en particulier de la corde qui joint les points

de la courbe d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$; cette corde est portée par la droite d'équation $y = \frac{u(\frac{\pi}{2}) - u(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} (x - 0) + u(0)$ ou d'équation $y = \frac{2}{\pi} x$.

Ainsi $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x = u(x) \geq \frac{2}{\pi} x$.

Ceci n'écrit encore : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$.

Remarque. - Ce résultat s'étend également aux fonctions $t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin t - t$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$.

Alors $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t$ et $\cos^{2p} t \geq 0$.

Ainsi $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t^2 \cos^{2p} t \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t (\cos^{2p} t) = \frac{\pi^2}{4} (1 - \cos^2 t) \cos^{2p} t = \frac{\pi^2}{4} (\cos^{2p} t - \cos^{2p+2} t)$.

En intégrant il vient : $0 \leq \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p} t dt \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{2p+2} t dt \right)$ car $\frac{\pi^2}{4} \geq 0$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1})$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$. $I_{p+1} = \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{2p+1} t dt = \left[\sin t \cos^{2p+1} t \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t (2p+1) (-\sin t) \cos^{2p} t dt$

$$I_{p+1} = 0 - 0 + \int_0^{\pi/2} (2p+1) \sin^2 t \cos^{2p} t dt = (2p+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{2p} t dt = (2p+1) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{2p+2} t dt \right)$$

$$J_{p+1} = (2p+1) (J_p - J_{p+1}); \quad (2p+2) J_{p+1} = (2p+1) J_p.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \underline{\underline{J_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} J_p.}}$$

d) Soit $p \in \mathbb{N}$. $t \mapsto \cos^{2p}(t)$ est positive, continue et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

alors $J_p > 0$. $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1})$ donne alors : $0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{I_{p+1}}{I_p} \right)$.

Comme $\frac{J_{p+1}}{I_p} = \frac{2p+1}{2p+2} : 0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \approx \frac{1}{2}$.

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2p+1} = 0 : \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{J_p}{I_p} = 0$ (théorème d'encadrement).

Q2 a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t \, dt = \left[t \cos^{2p} t \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t (2p) (-\sin t) (\cos^{2p-1} t) \, dt$
 $u'(t) = 1$ et $v(t) = \cos^{2p} t$

$I_p = 0 - 0 + 2p \int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2p-1} t \, dt = 2p \left[\frac{t^2}{2} \sin t \cos^{2p-1} t \right]_0^{\pi/2} - 2p \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2} \left(\cos t \cos^{2p-1} t + \sin t (2p-1) (-\sin t) (\cos t) \right) dt$
 $u'(t) = t$ et $v'(t) = \sin t \cos^{2p-1} t$

$I_p = 2p(0-0) - p \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p} t \, dt + p(2p-1) \int_0^{\pi/2} t^2 \sin^2 t \cos^{2p-2} t \, dt$

$I_p = -p J_p + p(2p-1) \int_0^{\pi/2} t^2 (1 - \cos^2 t) \cos^{2p-2} t \, dt = -p J_p + p(2p-1) (J_{p-1} - J_p).$

$I_p = p(2p-1) J_{p-1} + (-p(2p-1) - p) J_p = p(2p-1) J_{p-1} - 2p^2 J_p.$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, I_p = p(2p-1) J_{p-1} - 2p^2 J_p.$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Signalons encore que J_p n'est pas nul.

Alors $1 = p \left((2p-1) \frac{J_{p-1}}{I_p} - 2p \frac{J_p}{I_p} \right); \quad \frac{1}{p} = (2p-1) \frac{J_{p-1}}{I_p} - 2p \frac{J_p}{I_p}.$

Ainsi $\frac{1}{2p^2} = \frac{2p-1}{2p} \frac{1}{I_p} J_{p-1} - \frac{J_p}{I_p};$ alors $\frac{1}{2p^2} = \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}.$
 $= \frac{1}{I_{p-1}} \quad (\text{d'après Q3 c)}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$

c) $J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3; \quad I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}. \quad \underline{\underline{J_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \text{ et } I_0 = \frac{\pi}{2}.}}$

doit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{2} S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p^2} = \sum_{p=1}^n \left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} \right) = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{I_n} = 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} S_n \right) = \frac{J_0}{I_0} = \frac{1}{3} \frac{(\pi/2)^3}{\pi/2} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{12}$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$. $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers $S = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II

Δ Je ne distinguais pas f_0 et f_1 pour $k \geq 2$. C'est inutile, on !

Q1) Sommation de séries télescopiques.

a) • Soit $f \in \mathcal{E}$. Soit continue sur $]0, +\infty[$ donc $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 Or plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$. Ainsi $\Delta(f) \in \mathcal{E}$.

Δ est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

• Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\Delta(\lambda f + g))(x) = (\lambda f + g)(x+1) - (\lambda f + g)(x) = \lambda(f(x+1) - f(x)) + g(x+1) - g(x).$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\Delta(\lambda f + g))(x) = \lambda(\Delta f)(x) + (\Delta g)(x) = (\lambda(\Delta f) + (\Delta g))(x).$$

$$(\Delta(\lambda f + g)) = \lambda(\Delta f) + (\Delta g).$$

Ainsi Δ est linéaire.

Δ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{p=1}^r (\Delta f)(p) = \sum_{p=1}^r (f(p+1) - f(p)) = f(r+1) - f(1).$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=1}^r (\Delta f)(p) \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (f(r+1) - f(1)) \stackrel{(*)}{=} 0 - f(1) = -f(1).$$

$(*)$ $f \in \mathcal{E}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La série de terme général $(\Delta f)(p)$ converge et $\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) = -f(1).$

soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall r \in [n+1, +\infty[$, $\sum_{p=n+1}^r (\Delta f)(p) = \sum_{p=n+1}^r (f(p+1) - f(p)) = f(r+1) - f(n+1)$.

$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=n+1}^r (\Delta f)(p) \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (f(r+1) - f(n+1)) = 0 - f(n+1) = -f(n+1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p) = -f(n+1)$.

c) Obtenir que: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_k(x) = \prod_{i=0}^k \frac{1}{x+i}$... d'où le Δ de début!

Il est parfois difficile maintenant de se convaincre que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $f_k \in \mathcal{E}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $(\Delta f_{k-1})(x) = f_{k-1}(x+1) - f_{k-1}(x) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{x+1+i} - \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{x+i} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{x+i} - \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{x+i}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $(\Delta f_{k-1})(x) = \left(\prod_{i=0}^k \frac{1}{x+i} \right) (x - (x+k)) = -k f_k(x)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(\Delta f_{k-1}) = -k f_k$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^r f_k(p) = -\frac{1}{k} \sum_{p=1}^r (\Delta f_{k-1})(p)$.

Ainsi $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=1}^r f_k(p) \right) = -\frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^r (\Delta f_{k-1})(p) \stackrel{b)}{=} -\frac{1}{k} (-f_{k-1}(1)) = \frac{1}{k} f_{k-1}(1) \stackrel{ok?}{=} \frac{1}{k k!}$

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ la série de terme général $f_k(p)$ converge et $\sum_{p=1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k k!}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $r \in [n+1, +\infty[$.

$\sum_{p=n+1}^r f_k(p) = -\frac{1}{k} \sum_{p=n+1}^r (\Delta f_{k-1})(p)$

$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=n+1}^r f_k(p) \right) = -\frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^r (\Delta f_{k-1})(p) \stackrel{b)}{=} -\frac{1}{k} (-f_{k-1}(n+1)) = \frac{1}{k} f_{k-1}(n+1)$.

Obtenir que $\frac{1}{k} f_{k-1}(n+1) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$.

Alors $\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q2) Accélération de la convergence de (S_n) .

a) $p \in \mathbb{N}^*$. Montrons, par récurrence, que $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^q (k-1)! \int_k(p) = \frac{q!}{p} \int_q(p)$.

$$\bullet \frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^1 (k-1)! \int_k(p) = \frac{1}{p^L} = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p(p(p+1))} = \frac{1}{p} \int_2(p) = \frac{1!}{p} \int_2(p).$$

L'égalité vaut alors pour $q=1$.

Supposons la propriété vraie pour $q \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $q+1$.

$$\frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^{q+1} (k-1)! \int_k(p) = \frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^q (k-1)! \int_k(p) + q! \int_{q+1}(p) \stackrel{\text{H.R.}}{=} q! \left[\frac{1}{p} \int_q(p) - q! \int_{q+1}(p) \right].$$

$$\frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^{q+1} (k-1)! \int_k(p) = \frac{q!}{p} \left[\frac{1}{p(p+1) \dots (p+q)} - \frac{p}{p(p+1) \dots (p+q+1)} \right]$$

$$\frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^{q+1} (k-1)! \int_k(p) = \frac{q!}{p} \frac{1}{p(p+1) \dots (p+q+1)} [p+q+1 - p] = \frac{q! (q+1)}{p} \int_{q+1}(p) = \frac{(q+1)!}{p} \int_{q+1}(p).$$

ceci achève la récurrence.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^q (k-1)! \int_k(p) = \frac{q!}{p} \int_q(p).$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $q \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{q!}{p} \int_q(p); \quad \forall p \in \llbracket n+1, +\infty \llbracket, 0 \leq \frac{q!}{p} \int_q(p) \leq \frac{q!}{n+1} \int_q(p).$$

$$\text{Alors } \forall p \in \llbracket n+1, +\infty \llbracket, 0 \leq \frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^q (k-1)! \int_k(p) \leq \frac{q!}{n+1} \int_q(p).$$

Soit $r \in \llbracket n+1, +\infty \llbracket$.

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^r \frac{1}{p^L} = \sum_{p=n+1}^r \sum_{k=1}^q (k-1)! \int_k(p) \leq \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^r \int_q(p)$$

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^r \frac{1}{p^L} = \sum_{k=1}^q (k-1)! \sum_{p=n+1}^r \int_k(p) \leq \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^r \int_q(p).$$

Les nûes de termes g   raux $\frac{1}{p^L}$ et $\int_k(p)$ (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$)   tant convergents,

en faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient :

d) La version donnée de ce problème n'est pas le plus intéressant de traiter le cas général (q quelconque).

Il est très simple. En posant $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = \frac{(k-1)!}{k(n+1) \dots (n+k)}$

$$\text{Alors } \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1) \dots (n+k)} = \sum_{k=1}^q \alpha_k.$$

Remarque alors que $\alpha_1 = \frac{1}{n+1}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}, +\infty \mathbb{C}$, $\alpha_k = \frac{(k-1)!}{k(n+1)} \alpha_{k-1}$.

tout est alors clair !

ce qui est demandé →

ce que l'on pouvait demander →

```
Program essec01;
var n,p,q:integer;s,u:real;
begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
write('Donnez q. q=');readln(q);
s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);
u:=1/(n+1);s:=s+u;
for p:=2 to q do
begin
u:=sqr(p-1)*u/p/(n+p);s:=s+u;
end;
writeln('S'(' ',n,' ') vaut sensiblement : ',s);
end.
```

Ce que l'on devait demander →

Ici on fixe n et on obtient en jouant sur q une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à la précision voulue.

```
Program essec01;
```

```
var n,p:integer;s:real;
```

```
begin
```

```
write('Donnez n. n=');readln(n);
```

```
s:=0;
```

```
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);
```

```
s:=s+1/(n+1)+1/(2*(n+1)*(n+2));
```

```
writeln('S'(' ',n,' ') vaut sensiblement : ',s)
```

```
end.
```

```
Program essec01;
```

```
const epsilon=1e-6;
```

```
var n,p,k:integer;s,u:real;
```

```
begin
```

```
write('Donnez n. n=');readln(n);
```

```
s:=0;
```

```
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);
```

```
u:=1/(n+1);s:=s+u;k:=1;
```

```
while k*u/(n+1)>epsilon do
```

```
begin
```

```
k:=k+1;
```

```
u:=sqr(k-1)*u/k/(n+k);s:=s+u;
```

```
end;
```

```
writeln('S'(' ',n,' ') vaut sensiblement : ',s);
```

```
writeln('La valeur de q est : ',k);
```

```
end.
```

PARTIE III

(Q1) doit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels.

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0$$

$$\Rightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{(n-k)!} = 0$$

$$\Rightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = - \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{(n+1-k)!}$$

$$\Rightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = - \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{(n+1-k)!} \quad (1)$$

Le principe de récurrence "faible" nous dit qu'il existe une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de réels et une seule qui vérifie (1). Ainsi :

il existe une suite de réels $(u_n)_{n \geq 0}$ et une seule telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \end{cases}$$

En fait, précisément à l'aide d'une récurrence faible, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$.

→ C'est clair pour $n = 0$ car $u_0 = 1$.

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à n et montrons la pour $n+1$.

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, u_k \in \mathbb{Q} \text{ donc } \forall k \in \{0, \dots, n\}, \frac{u_k}{(n+1-k)!} \in \mathbb{Q}, \text{ ainsi } u_{n+1} = - \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{(n+1-k)!} \in \mathbb{Q}$$

Ainsi, s'achève la récurrence.

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}}}$$

$$\text{On a donc aussi } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{(n+1-k)!}. \text{ Alors :}$$

$$u_1 = - \frac{u_0}{(1-0)!} = -\frac{1}{1!} ; u_2 = - \frac{u_0}{2!} - \frac{u_1}{1!} = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} = \frac{1}{2!} ; u_3 = - \frac{u_0}{3!} - \frac{u_1}{2!} - \frac{u_2}{1!} \text{ ou}$$

$$u_3 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = 0 ; u_4 = - \frac{u_0}{4!} - \frac{u_1}{3!} - \frac{u_2}{2!} + \frac{u_3}{1!} = -\frac{1}{240} + \frac{1}{48} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{720}$$

$$\underline{\underline{u_0 = 1, u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = 0 \text{ et } u_4 = -\frac{1}{720}}}$$

Q4) Etude des polynômes de Bernoulli.

a) $U_1 = u_1 + u_0 X = X - \frac{1}{2} \quad \underline{U_1 = X - \frac{1}{2}}$

$U_2 = u_2 + \frac{u_1}{1!} X + \frac{u_0}{2!} X^2 = \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} X + \frac{1}{12} \quad \underline{U_2 = \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} X + \frac{1}{12}}$

$U_3 = u_3 + \frac{u_2}{1!} X + \frac{u_1}{2!} X^2 + \frac{u_0}{3!} X^3 = \frac{1}{6} X^3 - \frac{1}{4} X^2 + \frac{1}{12} X \quad \underline{U_3 = \frac{1}{6} X^3 - \frac{1}{4} X^2 + \frac{1}{12} X}$

$U_4 = u_4 + \frac{u_3}{1!} X + \frac{u_2}{2!} X^2 + \frac{u_1}{3!} X^3 + \frac{u_0}{4!} X^4 = \frac{1}{24} X^4 - \frac{1}{12} X^3 + \frac{1}{24} X^2 - \frac{1}{160} \quad \underline{U_4 = \frac{1}{24} X^4 - \frac{1}{12} X^3 + \frac{1}{24} X^2 - \frac{1}{160}}$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $U_n = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p}}{p!} X^p$ d'où $U'_n = \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} p X^{p-1} = \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{(p-1)!} X^{p-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{u_{n-1-\ell}}{\ell!} X^\ell$
 Ainsi $\underline{U'_n = U_{n-1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n(1) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} + u_n \stackrel{Q1!}{=} U_n(0) = U_n(1)$

Ainsi $\underline{U_n(0) = U_n(1)}$

b) • Fixons n dans $\mathbb{N}$ et montrons par récurrence que : $\forall p \in [0, n]$, $V_n^{(p)} = V_{n-p}$

→ C'est clair pour $p=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour p élément de $[0, n-1]$ et montrons la pour $p+1$.

$V_n^{(p+1)} = (V_n^{(p)})' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HR}}}{=} (V_{n-p})' \underset{\substack{\uparrow \\ (n-p \geq 1)}}{=} V_{n-p-1} = V_{n-(p+1)}$ Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [0, n], V_n^{(p)} = V_{n-p}}$; en particulier $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [0, n], V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)}$

montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est un polynôme ^{à coefficients réels} de degré n .

→ C'est clair pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour n .

$V'_n = V_{n-1}$; V_n est donc une primitive ^{à coefficients réels} d'un polynôme de degré $n-1$; ainsi V_n

est un polynôme ^{à coefficients réels} de degré n ; ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est un polynôme à coefficients réels de degré n .

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

La formule de Taylor (pour les polynômes... ou pas!) donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \sum_{p=0}^n \frac{V_n^{(p)}(0)}{p!} X^p = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} X^p.$$

- Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. $V_n(0) = \frac{V_0(0)}{0!} = 1$ et $V_n(1) = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!}$ d'après ce qui précède.

$$\text{Comme } V_n(0) = V_n(1) : 1 = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 1 + \sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} \quad ; \quad \sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- $V_0(0) = 1$ et $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0$; de l'unicité de la suite

$(u_n)_{n \geq 0}$, établie au §1, il résulte que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n(0) = u_n$.

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, V_n = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} X^p = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p}}{p!} X^p = U_n \text{ (et } V_0 = 1 = U_0).$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n$.

□ Pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (-1)^n U_n(1-X)$ il suffit de prouver que la suite de polynômes $((-1)^n U_n(1-X))_{n \geq 0}$ a les mêmes qualités que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = (-1)^n U_n(1-X)$ et montrons que :

$$\rightarrow W_0 = 1 \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, W'_n = W_{n-1} \rightarrow \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, W_n(0) = W_n(1).$$

$$\uparrow W_0 = (-1)^0 U_0(1-X) = 1 \text{ car } U_0 = 1. \quad U'_n = U_{n-1}$$

$$\uparrow \forall n \in \mathbb{N}, W'_n = (-1)^n (-1) U'_n(1-X) = (-1)^{n-1} U'_{n-1}(1-X) = W_{n-1}.$$

$$\uparrow \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, W_n(0) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n U_n(0) = (-1)^n U_n(1-1) = W_n(1).$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = U_n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (-1)^n U_n(1-x)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $2p+1 \geq 3$. $U_{2p+1}(0) = U_{2p+1}(1) \stackrel{2p+1}{=} (-1)^{2p+1} U_{2p+1}(0) = -U_{2p+1}(0)$.

Alors $2U_{2p+1}(0) = 0$, $U_{2p+1}(0) = 0$.

Comme $U_{2p+1} = \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{u_{2p+1-k}}{k!} x^k$, $U_{2p+1}(0) = \frac{u_{2p+1}}{0!}$; alors $u_{2p+1} = 0$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{2p+1} = 0$. (cela confirme le $u_3 = 0$).

Q3) Accélération de la convergence de (S_n) .

a) Soyons lucide pour s'éviter du travail. Fixons p dans $\mathbb{N}$ et posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = (n+1)! \int_0^1 \frac{U_n(x)}{(x+p)^{n+2}} dx.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. K_n = (n+1)! \int_0^1 \frac{U'_{n+1}(x)}{(x+p)^{n+2}} dx \stackrel{\text{SIP}}{=} (n+1)! \left(\left[U_{n+1}(x) \frac{1}{(x+p)^{n+2}} \right]_0^1 - \int_0^1 U_{n+1}(x) \left(-\frac{n+2}{(x+p)^{n+3}} \right) dx \right)$$

$U'_{n+1} = U_n$

$$K_n = (n+1)! \left[\frac{U_{n+1}(1)}{(1+p)^{n+2}} - \frac{U_{n+1}(0)}{p^{n+2}} \right] + (n+2)! \int_0^1 \frac{U_{n+1}(x)}{(x+p)^{n+3}} dx$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, K_n = (n+2)! \left[\frac{U_{n+1}(1)}{(1+p)^{n+2}} - \frac{U_{n+1}(0)}{p^{n+2}} \right] + K_{n+1}.$$

$$\text{En particulier } K_0 = \left[\frac{U_1(1)}{(1+p)^2} - \frac{U_1(0)}{p^2} \right] + K_1 \stackrel{U_1 = x - \frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{p^2} \right) + K_1.$$

$U_0 = 1$

$$\text{Alors } \underline{K_1 = K_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{p^2} \right)} = \int_0^1 \frac{U_0(x)}{(x+p)^2} dx - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{p^2} \right) \stackrel{U_0=1}{=} \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{p^2} \right).$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. U_{n+1}(1) = U_{n+1}(0) \text{ d'ac } K_n = (n+2)! U_{n+1}(0) \left[\frac{1}{(1+p)^{n+2}} - \frac{1}{p^{n+2}} \right] + K_{n+1}$$

$\frac{1}{x^{n+2}}$

$$\text{Ainsi } K_n = (n+2)! U_{n+1}(0) \left[\frac{1}{(1+p)^{n+2}} - \frac{1}{p^{n+2}} \right] + (n+3)! U_{n+2}(0) \left[\frac{1}{(1+p)^{n+3}} - \frac{1}{p^{n+3}} \right] + K_{n+2} \text{ et}$$

ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Fixons k dans $\mathbb{N}^*$ d'appliquons la formule précédente pour $n = 2k-1$.

$$\text{Il vient : } K_{2k-1} = (2k)! U_{2k}(0) \left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}} \right] + (2k+1)! U_{2k+1}(0) \left[\frac{1}{(p+1)^{2k+2}} - \frac{1}{p^{2k+2}} \right] + K_{2k+1}$$

Notons que $U_{2k}(0) = u_{2k}$ et $U_{2k+1}(0) = 0$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

$$\text{Alors } K_{2k-1} - K_{2k+1} = (2k)! u_{2k} \left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}} \right] \dots \text{ et ceci pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$

Fixons q dans $\mathbb{N}^*$ et posons n qui précède de 1 à q .

$$\text{Soient sans difficulté } K_1 - K_{2q+1} = \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left[\frac{1}{(p+1)^{2k+1}} - \frac{1}{p^{2k+1}} \right].$$

$$\text{Ainsi } K_1 + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left[\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right] = K_{2q+1} = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(u)}{(u+p)^{2q+3}} du$$

$$\text{En appelant que } K_1 = \int_0^1 \frac{du}{(u+p)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) \text{ on obtient :}$$

$$\int_0^1 \frac{du}{(u+p)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(u)}{(u+p)^{2q+3}} du$$

et ceci pour tout $q \in \mathbb{N}^*$

Remarque... Notons que nous n'avons fait qu'une intégration par parties et o récommence !

$$b) \text{ doit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, A_p = \int_0^1 \frac{du}{(u+p)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right)$$

$$A_p = \sum_{k=0}^n A_{p,k}$$

soit $r \in [n, +\infty[$

$$1 \sum_{p=n}^r A_p \leq \sum_{p=n}^r |A_p| \stackrel{a)}{=} \sum_{p=n}^r \left| (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(u)}{(u+p)^{2q+3}} du \right| \leq (2q+2)! \sum_{p=n}^r \int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(u)|}{(u+p)^{2q+3}} du$$

$$\text{Or : } \int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(u)|}{(u+p)^{2q+3}} du \leq \pi_{2q+1} \int_0^1 \frac{du}{(u+p)^{2q+3}} = \pi_{2q+1} \left[\frac{(u+p)^{-2q-2}}{-2q-2} \right]_0^1 = \frac{\pi_{2q+1}}{2q+2} \left(\frac{1}{p^{2q+2}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+2}} \right)$$

$$\text{Ainsi } (2q+2)! \sum_{p=n}^r \int_0^1 \frac{|U_{2q+1}(u)|}{(u+p)^{2q+3}} du \leq \frac{\pi_{2q+1}}{2q+2} (2q+2)! \sum_{p=n}^r \left(\frac{1}{p^{2q+2}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+2}} \right)$$

$$\text{Alors } \left| \sum_{p=n}^r A_p \right| \leq \pi_{2q+1}(2q+3)! \sum_{p=n}^r \left(\frac{1}{p^{2q+2}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+2}} \right) = \pi_{2q+1}(2q+3)! \left(\frac{1}{n^{2q+2}} - \frac{1}{(r+1)^{2q+2}} \right)$$

$$\text{Alors } \left| \sum_{p=n}^r A_p \right| \leq \frac{(2q+3)! \pi_{2q+1}}{n^{2q+2}}, \text{ n'a? Ne reste plus qu'à faire tendre } r$$

$r \rightarrow +\infty$.

$$\sum_{p=n}^r A_p = \underbrace{\sum_{p=n}^r \int_0^1 \frac{du}{(x+p)^2}}_{x_r} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{p=n}^r \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right)}_{y_r} + \underbrace{\sum_{p=n}^r \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right)}_{z_r}.$$

$$x_r = \sum_{p=n}^r \left[-\frac{1}{x+p} \right]_0^1 = \sum_{p=n}^r \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{r+1}; \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} x_r = \frac{1}{n}.$$

$$y_r = \frac{1}{2} \sum_{p=n}^r \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^r \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{r+1} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{n^2} + \sum_{p=n+1}^r \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(r+1)^2}.$$

$$\text{Alors } \lim_{r \rightarrow +\infty} y_r = \frac{1}{n^2} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}.$$

$$z_r = \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\sum_{p=n}^r \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) \right) = \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{n^{2k+1}} - \frac{1}{(r+1)^{2k+1}} \right)$$

$$\text{Alors } \lim_{r \rightarrow +\infty} z_r = \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \frac{1}{n^{2k+1}}.$$

$$\text{Avec } \forall r \in \mathbb{N}, +\infty, \left| \sum_{p=n}^r A_p \right| \leq \frac{(2q+3)! \pi_{2q+1}}{n^{2q+2}} \text{ et}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{p=n}^r A_p = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}}.$$

$$\text{On peut alors écrire } \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+3)! \pi_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$ il vient:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+3)! \pi_{2q+1}}{n^{2q+2}} \text{ pour tout } q \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$

c) soit $q \in \mathbb{N}^*$. Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n'' = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} + \sum_{k=1}^q \frac{(k!)!}{n^{k+1}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n'' \in \mathbb{Q}$ car $(k!)!$ est un produit d'éléments de $\mathbb{Q}$.

$$\text{De plus } \left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| = \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k!)!}{n^{k+1}} \right| \leq \frac{(q+1)! \pi_{q+1}}{n^{q+2}}.$$

$$\frac{\pi^2}{6} = S_n + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

$$\text{En posant } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n'' = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} + \sum_{k=1}^q \frac{(k!)!}{n^{k+1}} \text{ on a :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n'' \in \mathbb{Q} \text{ et } \left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(q+1)! \pi_{q+1}}{n^{q+2}}.$$

Supposons que $q = 2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^2 \frac{(k!)!}{n^{k+1}} = \frac{24n}{n^3} + \frac{2444}{n^5} = \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n'' = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}.$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{\pi^2}{6} - \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} \right) \right| \leq \frac{320 \pi_5}{n^6}.$$

d)

```

Program essec01;
var n,p:integer;s:real;

begin
write('Donnez n. n=');readln(n);
s:=0;
for p:=1 to n do s:=s+1/sqr(p);
s:=s+1/n-1/2/n/n+1/6/n/n/n-1/30/n/n/n/n/n;

writeln('S''''(' ,n,') vaut sensiblement : ',s);

end.

```

Un petit comparatif ..

Donnez n. n=2

S	S'	S''
1.2500000000E+00	1.6250000000E+00	1.6447916667E+00
-3.9493406684E-01	-1.9934066846E-02	-1.4240017845E-04

+ $S'' - \frac{\pi^2}{6}!$

Donnez n. n=5

S	S'	S''
1.4636111111E+00	1.6421825397E+00	1.6449337778E+00
-1.8132295574E-01	-2.7515271649E-03	-2.8907015803E-07

Donnez n. n=10

S	S'	S''
1.5497677312E+00	1.6444647009E+00	1.6449340645E+00
-9.5166335684E-02	-4.6936599028E-04	-2.3519532988E-09

Donnez n. n=50

S	S'	S''
1.6251327336E+00	1.6449291137E+00	1.6449340668E+00
-1.9801333263E-02	-4.9531736295E-06	-3.6379788071E-11

Donnez n. n=100

S	S'	S''
1.6349839001E+00	1.6449334245E+00	1.6449340668E+00
-9.9501667428E-03	-6.4237974584E-07	-8.0035533756E-11

Remarque - $0 < \frac{\pi^2}{6} - S_n < \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}$ et $\frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)} \sim \frac{(q-1)!}{n^{q+1}}$.

$$|\frac{\pi^2}{6} - S_n| \leq \frac{(q+1)! n^{q+1}}{n^{q+2}}$$

Ya pas photo, n'a ?

De petits exercices.1.. calcule π_5 .2.. Donner un majorant de $|\frac{\pi^2}{6} - S_n|$ 3.. Ecrire un programme qui calcule S_n pour

n et q donnés.