PROPOSITION DE CORRIGÉ BCE

CONCOURS D'ADMISSION 2019

prépa

Conception : HEC/ESCP Europe

Mathématiques II

Option Scientifique

Jeudi 2 mai 2019 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante de l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Partie I. Fonction logistique et lois logistiques

1.a) On voit immédiatement que Λ est à valeurs dans $]0,1[$.

Soit $y \in]0,1[$. Montrons qu'il existe un unique réel x tel que $\Lambda(x) = y$.

En effet $\Lambda(x) = y \iff 1 + \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{y} \iff \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1-y}{y}$ et par bijectivité de la fonction exponentielle,

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1-y}{y} \iff -x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right) \iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Ceci prouve l'existence et l'unicité de x pour tout $y \in]0,1[$.

Ainsi $\boxed{\Lambda \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]0,1[\text{ et pour tout } x \in]0,1[,\ L(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)}$.

---

b) Λ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\Lambda'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}.}$

---

c) La fonction $f : x \mapsto x - \Lambda(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \text{ d'où } \quad f'(x) > 0$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après les limites de Λ en $-\infty$ et $+\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Il existe alors un unique réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$ i.e.

$$\boxed{\text{il existe un unique réel } x_0 \text{ tel que } \Lambda(x_0) = x_0.}$$

---

d) D'après le calcul réalisé précédemment, on remarque que, pour tout x réel, $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$. 1 est un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}$, on peut alors en appliquant l'inégalité des accroissements finis, en déduire l'inégalité, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{|f(x) - f(x_0)| \leqslant |x - x_0| \quad \text{i.e } |\Lambda(x) - x| \leqslant |x - x_0| \text{ car } f(x_0) = 0.}$$

2.a) On a $\Lambda(0) = \frac{1}{2}$ donc $\Lambda(0) > 0$ et $\Lambda(1) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-1}}$ d'où $\Lambda(1) < 1$. On a alors $x_0 \in]0, 1[$ ce qui justifie les lignes (2) et (3).

On remplace les premiers pointillés par `a=c` et les seconds par `b=c` suivant la méthode de dichotomie.

---

b) La valeur maximale est `2e-4` puisque lorsque la boucle se termine, le segment d'extrémité `a` et `b` contient x_0 et est de longueur inférieure à `eps`, le milieu de ce segment est alors distant de x_0 d'au plus `eps/2`.

---

c) D'après la question 1.d) en valeur absolue cette valeur est inférieure à `eps/2`.

---

3. Rappelons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

a) Montrons les trois propriétés qui assurent que λ est une densité de probabilité.

- Il est évident que λ est à valeurs positives.
- Il est immédiat que λ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- Montrons pour finir que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

Cette intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$ et Λ est une primitive qui admet en chacune de ses bornes une limite finie. On peut alors en conclure que l'intégrale I est convergente et $I = \lim\limits_{x\to+\infty} \Lambda(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} \Lambda(x) = 1 - 0 = 1$.

Ainsi $\boxed{\lambda \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

---

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\lambda(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{-x}+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2} = \lambda(x)$. Ainsi $\boxed{\lambda \text{ est paire.}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = u(\mathrm{e}^{-x})$ où u est la fonction définie et dérivable pour $t \in \mathbb{R}^+$ par $u(t) = \dfrac{t}{(1+t)^2}$.

Or pour tout $t \geqslant 0$, $u'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} - 2\dfrac{t}{(1+t)^3} = \dfrac{1-t}{(1+t)^3}$ D'où $\lambda'(x) = -e^{-x}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^3}$.

On en déduit que $\lambda'(x)$ est du même signe que $\mathrm{e}^{-x} - 1$, soit positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\lambda \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^- \text{ et décroissante sur } \mathbb{R}^+.}$$

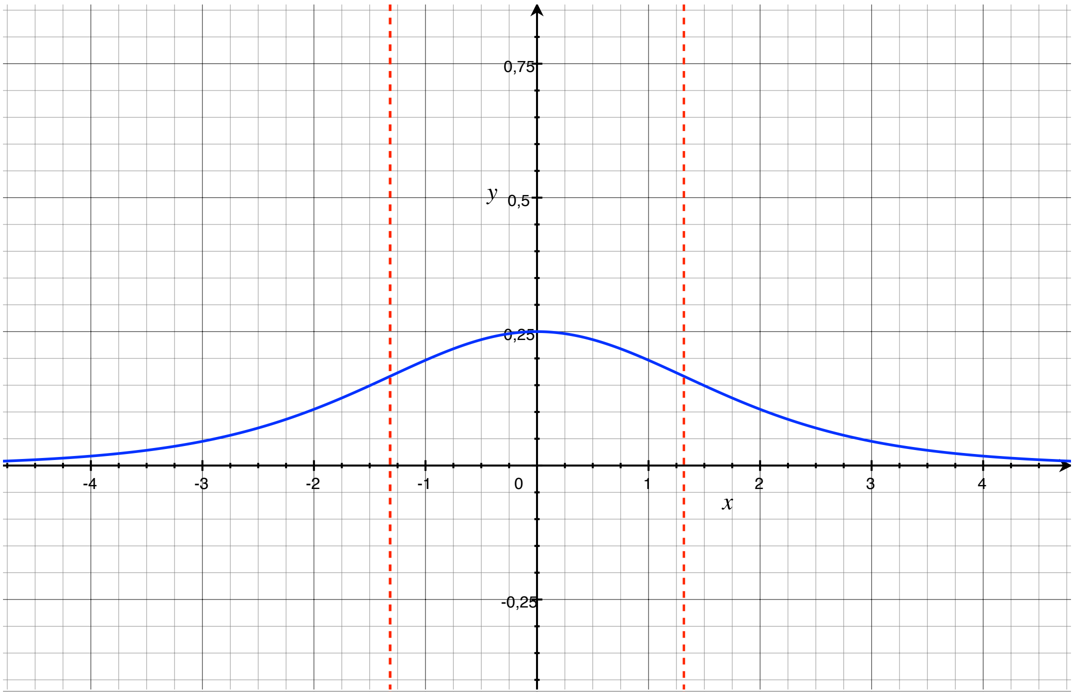
Pour les points d'inflexion, il faudrait calculer la dérivée seconde. On procède de même en posant pour t positif, $v(t) = \dfrac{t-t^2}{(1+t)^3}$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda''(x) = \mathrm{e}^{-x}v'(\mathrm{e}^{-x})$.

Par un calcul classique $v'(t) = \dfrac{t^2-4t+1}{(1+t)^4}$. v' s'annule en changeant de signe aux racines du numérateur i.e. pour $t = 2+\sqrt{3}$ et $t = 2-\sqrt{3}$. Ainsi λ'' s'annule en changeant de signe pour

$$\boxed{x = -\ln(2+\sqrt{3}) \text{ et } x = -\ln(2-\sqrt{3}) \text{ qui sont donc les points d'inflexion de la courbe de } \lambda.}$$

Voici la courbe :



4. a) Soit Y qui suit la loi logistique $\mathcal{L}(r,s)$. $Y = sZ + r$ où Z suit la loi logistique standard.

D'après le théorème de transfert, $\mathbf{E}(Y^k)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} (sx+r)^k \lambda(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Cette intégrale est impropre en $+\infty$ et $-\infty$ et l'on a :

$$|(sx+r)^k| \underset{+\infty}{\sim} s^k x^k \text{ et } \lambda(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$$

d'où $|(sx+r)^k\lambda(x)| \underset{+\infty}{\sim} s^k x^k \mathrm{e}^{-x}$ et $\int_0^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge puisque l'on reconnaît $\Gamma(k+1)$.

Par équivalence de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |(sx+r)^k\lambda(x)|\mathrm{d}x$ converge.

En $-\infty$,

$$|(sx+r)^k| \underset{-\infty}{\sim} s^k |x|^k \text{ et } \lambda(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{x}$$

d'où $|(sx+r)^k\lambda(x)| \underset{+\infty}{\sim} s^k |x|^k \mathrm{e}^{x}$ et $\int_{-\infty}^{0} |x|^k \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$ converge puisqu'elle se ramène à l'intégrale précédente par le changement de variable affine $x = -t$.

On peut donc affirmer que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \mathbf{E}(Y^k)}$ existe.

Pour $\mathbf{E}(Z)$, étant donné que λ est une densité de Z, qu'elle est paire et que Z possède une espérance alors $\mathbf{E}(Z) = 0$. Par linéarité de l'espérance $\boxed{\mathbf{E}(Y) = s\mathbf{E}(Z) + r = r}$.

b) Puisque L est la fonction réciproque de Λ la fonction de répartition de la loi logistique standard, alors si U suit la loi uniforme sur $]0,1[$, $L(U)$ suit la loi logistique standard, puis $sL(U)+r$ la loi $\mathcal{L}(r,s)$. D'où la fonction :

```
function S=grandlogis(n,p,r,s)
        U=rand(n,p)
        S=s*log(U/.(1-U))+r
endfunction
```

---

c) Puisque la loi $\mathcal{L}(0,1)$ admet un moment d'ordre 4, on sait par la loi faible des grands nombres, que si $(Y_1,...,Y_n)$ est un échantillon de cette loi $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right)$ est un estimateur convergent du moment d'ordre 2 de cette loi. D'où, puisque cette loi est centrée, pour n assez grand, on peut raisonnablement penser que $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\right)$ est très probablement une valeur approchée de la variance de la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

La fonction Scilab précédente fournit un échantillon de taille `n` de cette loi avec l'instruction `grandlogis(n,1,1,0)`.

Donc lorsque n est assez grand,

`ech=grandlogis(n,1,0,1); V=mean(ech.^2)`
place dans la variable `V` une valeur approchée de la variance de la loi $\mathcal{L}(0,1)$

.

5.a) Par définition, $Z = \ln(U_1) - \ln(U_2)$. Déterminons la loi de $\ln(U_1)$. Pour tout x réel,

$$\mathbf{P}([\ln(U_1) \leqslant x]) = \mathbf{P}([U_1 \leqslant \mathrm{e}^x]) = 1 - \exp(-\mathrm{e}^x)$$

D'où une densité $f_{\ln(U_1)}$ de $\ln(U_1)$ s'obtient par dérivation de sa fonction de répartition qui est C^1 sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{\ln(U_1)}(x) = \mathrm{e}^x \exp(-\mathrm{e}^x) = \exp(x - \mathrm{e}^x)$.

$\ln(U_2)$ suit la même loi que $\ln(U_1)$ d'où un densité de $-\ln(U_2)$ est $x \mapsto f_{\ln(U_1)}(-x)$.

D'après le lemme des coalitions, $\ln(U_1)$ et $-\ln(U_2)$ sont indépendantes et $f_{\ln(U_1)}$ est bornée par 1 ($x - \mathrm{e}^x < 0$). D'où la formule de convolution s'applique pour la loi de $\ln(U_1) - \ln(U_2)$ i.e. une densité h est définie par, pour tout x réel :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln(U_1)}(x-t) f_{\ln(U_2}(-t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x - t - \mathrm{e}^{x-t}) \exp(-t - \mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

d'où

$$h(x) = \mathrm{e}^x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \exp(-(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $y = \mathrm{e}^{-t}$ bijectif décroissant, de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ peut être réalisé. $dy = -\mathrm{e}^{-t}dt$ d'où

$h(x) = \mathrm{e}^x \int_{+\infty}^{0} -y \exp(-(1+\mathrm{e}^{-x})y)(-1)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} y \exp(-(1+\mathrm{e}^x)y)\mathrm{d}y.$

Or $\int_0^{+\infty} y(1+\mathrm{e}^x)\exp(-(1+\mathrm{e}^x)y)\mathrm{d}y$ est l'espérance de la loi $\mathcal{E}((1+\mathrm{e}^x))$ donc elle vaut $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. D'où $h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ ce qui achève la démonstration. $\boxed{\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \text{ suit la loi } \mathcal{L}(0,1)}$.

---

b) Pour simuler une variable aléatoire suivant la loi logistique standard on peut considérer l'expression de valeur aléatoire `log(grand(1,1,"exp",1)/grand(1,1,"exp",1)).`

Partie II. Variance de la loi logistique standard

6.a) $P_0 = (-1)^0\binom{1}{1}(X-1)^0 = 1$ et $P_1 = (-1)^0\binom{3}{1}(X-1)^1 + (-1)^1\binom{3}{3}(X-1)^0 = 3(X-1) - 1 = 3X - 4$.

---

b) $\boxed{\text{Le degré de } P_n \text{ est } n}$ puisque P_n s'exprime comme une somme de polynômes de degrés inférieurs où égaux à n et que cette somme comporte un seul terme de degré n pour $k=0$, $\binom{2n+1}{1}(X-1)^n$.

Ce terme donne aussi à $\boxed{P_n \text{ son coefficient dominant qui vaut } (2n+1)}$.

Le coefficient du terme de degré $n-1$ provient des deux termes de la somme pour $k=0$ et $k=1$.

- Pour le premier, c'est de terme de degré $n-1$ de $(2n+1)(X-1)^n$ soit $(2n+1)(-1)nX^{n-1}$.
- Pour le second, c'est $-\binom{2n+1}{3}X^{n-1} = -\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$.

D'où finalement $\boxed{\text{le coefficient de } X^{n-1} \text{ vaut } -(2n+1)n\left(1+\frac{2n-1}{3}\right) = -(2n+1)n\dfrac{2n+2}{3}.}$

---

c) On a donc la factorisation suivante : $P_n = (2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)$ où $z_1, ..., z_n$ sont les racines complexes de P_n.

Lorsqu'on développe le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)$, on doit choisir dans chaque facteur X ou $-z_k$, faire le produit de ces choix puis la somme de ces produits. Pour obtenir un terme de degré $n-1$, on doit choisir X $n-1$ fois et $-z_k$ une fois.

D'où le terme de degré $n-1$ obtenu par développement vaut $-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$. D'où le terme de degré $n-1$ de P_n obtenu grâce à ce développement vaut $(2n+1)\left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right)$.

En utilisant le résultat de la question précédente on a : $(2n+1)\left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = -(2n+1)n\dfrac{2n+2}{3}$ d'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} z_k = n\frac{2n+2}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.}$$

7.a) D'après la formule de De Moivre,

$$(\cos(x) + i\sin(x))^{2n+1} = (\mathrm{e}^{ix})^{2n+1} = \mathrm{e}^{i(2n+1)x} = \cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x)$$

d'où on a bien $\boxed{\sin((2n+1)x = \mathcal{I}m((\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1}).}$

D'après la formule du binôme, $(\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i\sin(x))^k(\cos(x))^{2n+1-k}$. On sépare les indices pairs et les impairs :

$$(\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(i\sin(x))^{2k}(\cos(x))^{2n+1-2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(i\sin(x))^{2k+1}(\cos(x))^{2n-2k}$$

i.e.

$$\begin{aligned}(\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1} &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^k(\sin(x))^{2k}(\cos(x))^{2n+1-2k}}_{\in\mathbb{R}}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k i\sin(x))^{2k+1}(\cos(x))^{2(n-k)}\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}(\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1} &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^k(\sin(x))^{2k}(\cos(x))^{2n+1-2k}}_{\in\mathbb{R}}\\ &\quad+i\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(x))\cos^{2(n-k)}(x)\end{aligned}$$

et ainsi $\boxed{\mathcal{I}m((\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(x)\cos^{2(n-k)}(x)}$

---

b) D'après la question précédente, pour tout $x\in]0,\pi[$ ($\sin(x)\neq 0$),

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}(x)}=\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(x))\cos^{2(n-k)}(x)}{\sin^{2n+1}(x)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{(2k+1)-(2n+1)}(x)$$

d'où $\dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}(x)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k(\sin^{-2}(x))^{n-k}$ soit $\boxed{\dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}(x)}=P_n\left(\sin^{-2}(x)\right).}$

---

c) On remarque que si $k\in[\![1,n]\!]$ et $x_k=\dfrac{k\pi}{2n+1}$, alors $\sin((2n+1)x_k)=0$. D'où si $z_k=\dfrac{1}{\sin^2(x_k)}$, alors z_k est une racine de P_n. De plus la fonction sin est injective sur $]0,\pi[$ à valeurs strictement positives et la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est aussi injective sur $]0,+\infty[$, d'où les z_k sont deux à deux distinctes.

On peut donc en déduire que $\sum_{k=1}^{n}z_k$ est la somme des racines de P_n ce qui, d'après ce qui précède, montre que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}z_k=\frac{2n(n+1)}{3}\quad\text{i.e.}\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{2n(n+1)}{3}.}$$

8.a) • Sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$, $x\mapsto\sin(x)$ est concave car sa dérivée seconde, $x\mapsto-\sin(x)$ est négative. D'où par l'inégalité des tangentes, $\sin(x)\leqslant\sin'(0)(x-0)+\sin(0)$ i.e. $\boxed{\sin(x)\leqslant x.}$

- De même la fonction tangente est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ car sa dérivée $x \mapsto 1+\tan^2(x)$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. D'où $\tan'(0)(x-0)+\tan(0) \leqslant \tan(x)$ i.e $\boxed{x \leqslant \tan(x).}$
- On a pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin(x) \leqslant x$, d'où par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$, $\boxed{\frac{1}{\sin^2(x)} \geqslant \frac{1}{x^2}.}$

  On remarque que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{\sin^2(x)} - 1 = \frac{1}{\tan^2(x)}$ et on conclut de même.

---

b) Ainsi pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2}+1$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} + 1 \right)$$

i.e.

$$\frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \left. \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) \leqslant \frac{2n(n+1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \left. \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) + n$$

d'où $\frac{2n(n+1)}{3} - n \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \left. \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}$ i.e

$$\boxed{\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \left. \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}.}$$

---

c) De l'encadrement précédent, on tire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cet encadrement :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$$

On voit que le majorant et le minorant tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand $n \to +\infty$ ce qui permet d'en déduire que $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

9.a) Z est centrée donc $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \mathrm{d}x$.

Par parité de la fonction intégrée, $\mathbf{V}(Z) = 2\int_0^{+\infty} x^2 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \mathrm{d}x$

On réalise une intégration par parties sur $[0, A]$ où $A > 0$ en posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \Lambda(x) - 1$:

$$\int_0^A 2x^2 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \mathrm{d}x = \left[2x^2(\Lambda(x)-1)\right]_0^A - \int_0^A 4x(\Lambda(x)-1)\mathrm{d}x$$

i.e.

$$\int_0^A 2x^2 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \mathrm{d}x = \left[2x^2 \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+e^{-x}}\right]_0^A - \int_0^A 4x \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x = 2A^2 \frac{\mathrm{e}^{-A}}{1+e^{-A}} + 4\int_0^A \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$$

Quand $A \to +\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-A}}{1+e^{-A}} \sim \mathrm{e}^{-A}$, d'où $2A^2\dfrac{\mathrm{e}^{-A}}{1+e^{-A}} \to 0$ et ainsi $4\displaystyle\int_0^A \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \to \mathbf{V}(Z)$. Ce qui donne la relaztion $\boxed{\mathbf{V}(Z) = 4\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x.}$

---

b) Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{e}^{-(k+1)x}\right)\mathrm{d}x$. Or pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{e}^{-(k+1)x} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-\mathrm{e}^{-x})^k$.

D'après la formule de la progression géométrique, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-\mathrm{e}^{-x})^k = \frac{1-(-\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1+(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ puisque $-\mathrm{e}^{-x} \neq 1$. D'où :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\frac{1+(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + (-1)^n\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)\mathrm{d}x$$

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + (-1)^n\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}(-1)^n\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ puisque ces deux intégrales sont bien convergentes.

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x + (-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x}$$

qui donne l'égalité demandée en faisant passer le dernier terme dans le membre de gauche.

---

c) Pour tout x positif, $0 \leqslant \dfrac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \leqslant x\mathrm{e}^{-(n+2)x}$.

D'où par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(n+2)x}\mathrm{d}x$, sachant que cette dernière intégrale converge puisque qu'elle est proportionnelle à l'espérance de la loi $\mathcal{E}(n+2)$.

Cette dernière information nous montre aussi que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(n+2)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+2)^2}$, ce qui prouve via le théorème des gendarmes que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x \to 0$ quand $n \to +\infty$. On n'a alors aucune difficulté pour en déduire que $\boxed{I_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.}$

On en déduit que, quand $n \to +\infty$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

On vient de voir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{(k+1)^2}$, ainsi $n \to +\infty$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^2} \to \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$

ce qui revient à dire que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.}$

---

d) On peut écrire l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{k-1}}{k^2}=\sum_{k\text{ pair}}\frac{2}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{4k^2}=\frac{\pi^2}{12}$, d'où $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$ i.e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

On déduit des questions qui précèdent que $\boxed{V(Z)=4\times\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{3}.}$

---

10. a) Ces deux intégrales sont impropres en 0 et $+\infty$.

- En $+\infty$, les deux fonctions sont à valeurs positives et négligeables devant $\frac{1}{x^2}$ puisque négligeables devant $x\mathrm{e}^{-x}$, elle même négligeable devant $\frac{1}{x^2}$. On en déduit la convergence de ces intégrales en $+\infty$ par comparaison avec l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.
- En zéro, $\ln(x)\mathrm{e}^{-x}\sim\ln(x)$ et $(\ln(x))^2\mathrm{e}^{-x}\sim(\ln(x))^2$ qui sont négligeables devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Sachant que $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge, on en déduit l'absolue convergence de ces intégrales par comparaison.

Finalement $\boxed{\text{ces deux intégrales sont bien convergentes.}}$

---

b) Le théorème de transfert nous permet d'affirmer que ces deux intégrales sont, respectivement, l'espérance et le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire de la forme $\ln(U)$, U étant une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi par la formule de Huyghens, $J-I^2$ est la variance d'une telle variable aléatoire.

Or on a vu que si U_1 et U_2 sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 1, alors $\ln(U_1)-\ln(U_2)$ suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$. On a donc $\mathbf{V}(\ln(U_1)-\ln(U_2))=\frac{\pi^2}{3}$.

Mais par le théorème des coalitions, $\ln(U_1)$ et $-\ln(U_2)$ sont indépendantes, d'où

$$\mathbf{V}(\ln(U_1)-\ln(U_2))=\mathbf{V}(\ln(U_1))+\mathbf{V}(-\ln(U_2))=\mathbf{V}(\ln(U_1))+\mathbf{V}(\ln(U_2))=2\mathbf{V}(\ln(U_1))$$

Ainsi $\mathbf{V}(\ln(U_1))=\frac{\pi^2}{6}$ d'où $\boxed{J-I^2=\frac{\pi^2}{6}.}$

Partie III. Estimation à partir de données binaires

11. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ alors F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'=f$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a aussi, $\lim\limits_{-\infty}F=0$, $\lim\limits_{+\infty}F=1$, F est continue sur $\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{F\text{ réalise une bijection de }\mathbb{R}\text{ sur }]0,1[.}$$

12. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables de même loi, indépendante, de variance $F(\theta)(1-F(\theta))$, donc non nulle. On peut alors appliquer le théorème central limite :

$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{Y_n} - F(\theta))}{\sqrt{F(\theta)(1-F(\theta))}}$ converge en loi, quand $n \to +\infty$, vers une variable aléatoire, disons U, telle que U suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On sait alors d'après un résultat du cours que, quand $n \to +\infty$,

$$\boxed{\sqrt{n}(\overline{Y_n} - F(\theta)) \text{ converge en loi vers } \sqrt{F(\theta)(1-F(\theta))}U, \text{ qui suit la loi } \mathcal{N}(0, F(\theta)(1-F(\theta)))}$$

d'après les propriétés de la loi normale.

13.a) On a $\mathbf{P}_\theta(E_\theta) = \mathbf{P}_\theta\left(\left[0 < \sum_{k=1}^{n} Y_k < n\right]\right)$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $F(\theta)$ puisque les Y_k sont indépendantes en suivant la loi $\mathcal{B}(F(\theta))$. D'où :

$$\mathbf{P}_\theta([0 < S_n < n]) = 1 - \mathbf{P}_\theta([S_n = 0]) - \mathbf{P}_\theta([S_n = n]) = 1 - (1-F(\theta))^n - (F(\theta))^n$$

Sachant que $0 < F(\theta) < 1$, on en déduit aisément que $(1-F(\theta))^n \to 0$ et $(F(\theta))^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc $\boxed{\mathbf{P}_\theta(E_\theta) \to 1 \text{ quand } n \to +\infty.}$

---

b) Procédons par double inclusion :

i. • Si $\omega \in E_n$ alors $T_n(\omega) = F^{-1}(\overline{Y_n}(\omega))$, donc si l'on a aussi $T_n(\omega) \leqslant x$ par composition par F, $\overline{Y_n}(\omega) \leqslant F(x)$. Ainsi $\omega \in [\overline{Y_n} \leqslant F(x)] \cap E_n$.

• Si $\omega \in [\overline{Y_n} \leqslant F(x)] \cap E_n$, alors $\omega \in E_n$ et $T_n(\omega) = F^{-1}(\overline{Y_n}(\omega))$ par croissance de F^{-1}, $T_n(\omega) \leqslant F^{-1}(F(x))$ i.e. $T_n(\omega) \leqslant x$.

$\boxed{\text{On a bien l'égalité ensembliste proposée.}}$

• Si $x < 0$, alors $[T_n \leqslant x] \subset E_n$, d'où $[T_n \leqslant x] = [T_n \leqslant x] \cap E_n = [\overline{Y_n} \leqslant F(x)] \cap E_n$ qui est bien un élément de $\mathcal{A}$.

• Si $x \geqslant 0$, $[T_n \leqslant x] = ([T_n \leqslant x] \cap E_n) \cup \overline{E_n}$ puisque si $\omega \in \overline{E_n}$, $T_n(\omega) = 0$ donc est plus petit que x. D'où $[T_n \leqslant x]$ est la réunion de deux éléments de $\mathcal{A}$, c'est un élément de $\mathcal{A}$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel, } [T_n \leqslant x] \in \mathcal{A}.}$

---

ii. Cela découle de ce que l'on vient de voir. On a dans tous les cas :

$$[\overline{Y_n} \leqslant F(x)] \cap E_n \subset [T_n \leqslant x] \subset ([\overline{Y_n} \leqslant F(x)] \cap E_n) \cup \overline{E_n}$$

La croissance de $\mathbf{P}_\theta$ et l'inégalité de Boole montrent que

$$\boxed{\mathbf{P}_\theta([\overline{Y_n} \leqslant F(x)]) \cap E_n) \leqslant \mathbf{P}_\theta([T_n \leqslant x]) \leqslant \mathbf{P}_\theta([\overline{Y_n} \leqslant F(x)] \cap E_n) + \underbrace{\mathbf{P}_\theta(\overline{E_n})}_{=1-\mathbf{P}_\theta(E_n)}}$$

---

c) D'après la loi faible des grands nombres $\overline{Y_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} F(\theta)$ quand $n \to +\infty$.

• Si $x > \theta$, $F(x) > F(\theta)$, d'où $\mathbf{P}_\theta([\overline{Y_n} \leqslant F(x)]) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

Sachant que $\mathbf{P}_\theta(E_n) \to 1$ quand $n \to +\infty$, que forcément $\mathbf{P}_\theta([\overline{Y_n} \leqslant F(x)]) \cup E_n) \to 1$ quand $n \to +\infty$, par la formule du crible, $\mathbf{P}_\theta([\overline{Y_n} \leqslant F(x)]) \cap E_n) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

D'où par encadrement, $\boxed{\mathbf{P}_\theta([T_n \leqslant x]) \to 1 \text{ quand } n \to +\infty.}$

- Si $x < \theta$, $F(x) < F(\theta)$, d'où $\mathbf{P}_\theta([\overline{Y_n} \leqslant F(x)]) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $\mathbf{P}_\theta([\overline{Y_n} \leqslant F(x)] \cup E_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ puisqu'elle est majorée par la précédente.

Avec 13.a), on déduit que $\boxed{\mathbf{P}_\theta([T_n \leqslant x]) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.}$

---

d) Montrons que $T_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ quand $n \to +\infty$.

Soit $\alpha > 0$. On a :

$1 = \mathbf{P}_\theta([T_n < \theta - \alpha]) + \mathbf{P}_\theta([|T_n - \theta| \leqslant \alpha]) + \mathbf{P}_\theta([T_n > \theta + \alpha])$ i.e.

$$1 = \underbrace{\mathbf{P}_\theta([T_n < \theta - \alpha])}_{\to 0, n \to +\infty} + \mathbf{P}_\theta([|T_n - \theta| \leqslant \alpha]) + 1 - \underbrace{\mathbf{P}_\theta([T_n \leqslant \theta + \alpha])}_{\to 1, n \to +\infty}$$

d'après la question précédente.

D'où $\boxed{\mathbf{P}_\theta([|T_n - \theta| \leqslant \alpha]) \to 1 \text{ quand } n \to +\infty}$

Ainsi $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P}_\theta, \mathcal{A})$ (13.b)i.) qui converge en probabilité vers θ et dont la définition ne dépend pas de θ, $\boxed{\text{c'est bien une suite convergente d'estimateurs de } \theta.}$

---

14. a) i. C'est tout simplement du au fait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier au point θ. On applique la définition de la continuité.

---

ii. Soit $\omega \in [|T_n - \theta| \leqslant \alpha] \cap E_n$. On a donc $F^{-1}(\overline{Y_n}(\omega)) \in [\theta - \alpha, \theta + \alpha]$ ie $\overline{Y_n}(\omega) \in [F(\theta - \alpha), F(\theta + \alpha)]$.

Mais, $U_n(\omega) = \dfrac{F^{-1}(\overline{Y_n}(\omega)) - F^{-1}(F(\theta))}{\overline{Y_n}(\omega) - F(\theta)}$.

Il suffit alors d'établir que pour tout $y \in [F(\theta - \alpha), F(\theta + \alpha)]$,

$$\left| \frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(F(\theta))}{y - F(\theta)} - \frac{1}{f(\theta)} \right| \leqslant \varepsilon$$

On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction F^{-1} dérivable sur $[F(\theta-\alpha), F(\theta+\alpha)]$: il existe $c \in]F(\theta - \alpha), F(\theta + \alpha)[$ tel que $\dfrac{F^{-1}(y) - F^{-1}(F(\theta))}{y - F(\theta)} = (F^{-1})'(c) = \dfrac{1}{F'(F^{-1}(c))} = \dfrac{1}{f(F^{-1}(c))}$.

D'où $\left| \dfrac{F^{-1}(y) - F^{-1}(F(\theta))}{y - F(\theta)} - \dfrac{1}{f(\theta)} \right| = \left| \dfrac{1}{f(F^{-1}(c))} - \dfrac{1}{f(\theta)} \right|$ et puisque $F^{-1}(c) \in]\theta - \alpha, \theta + \alpha[$, on obtient que $\left| \dfrac{1}{f(F^{-1}(c))} - \dfrac{1}{f(\theta)} \right| \leqslant \varepsilon$.

On a bien prouvé que $\boxed{[|T_n - \theta| \leqslant \alpha] \cap E_n \subset B_n(\varepsilon).}$

---

b) Étant donné que T_n converge en probabilité vers θ, $\mathbf{P}_\theta([|T_n - \theta| \leqslant \alpha])$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.

Sachant de plus que $\mathbf{P}_\theta(E_n) \to 1$ quand $n \to +\infty$, on a comme précédemment que

$$\mathbf{P}_\theta([|T_n - \theta| \leqslant \alpha] \cap E_n) \to 1 \text{ quand } n \to +\infty$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, si l'on choisit α comme dans la question 14, cela montre que $\mathbf{P}_\theta(B_n(\varepsilon)) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

Cela prouve que

$$\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } \frac{1}{f(\theta)}.}$$

c) On a la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n - \theta = U_n(\overline{Y_n} - F(\theta))$.

C'est immédiat pour les ω tels que $\overline{Y_n}(\omega) \neq F(\theta)$.

Si $\overline{Y_n}(\omega) = F(\theta)$ alors $T_n(\omega) = F^{-1}(F(\theta)) = \theta$ car $\overline{Y_n}(\omega) \in]0,1[$, d'où l'égalité est aussi vérifiée.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}(T_n - \theta) = U_n \times \sqrt{n}(\overline{Y_n} - F(\theta))$.

On applique Slutsky :

- $U_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \dfrac{1}{f(\theta)}$,
- $\sqrt{n}(\overline{Y_n} - F(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} V$ où V suit la loi $\mathcal{N}(0, F(\theta)(1-F(\theta)))$,

D'où

$$\boxed{U_n \times \sqrt{n}(\overline{Y_n} - F(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{f(\theta)}V \text{ qui suit la loi } \mathcal{N}\left(0, \frac{F(\theta)(1-F(\theta))}{f(\theta)^2}\right).}$$

Partie IV. Régression logistique

15.a) La matrice $M\,{}^tM$ est une matrice carrée d'ordre p. Soit X une matrice colonne d'ordre p telle que $M\,{}^tMX$. On a alors ${}^tXM\,{}^tMX = 0$ i.e. ${}^t({}^tMX)\,{}^tMX = \|{}^tMX\|^2 = 0$ où la norme est la norme canonique sur $\mathbb{R}^k$. Alors ${}^tMX = 0$ mais les p colonnes de ${}^tM$ forment une famille libre puisque $rg({}^tM) = p$ donc X est la colonne nulle.

On peut en déduire que $\boxed{M\,{}^tM \text{ est inversible.}}$

b) Remarquons que ${}^t({}^tMU - H)\,{}^tMU - H = \|{}^tMU - H\|^2$.

U est une solution aux moindres carrés de l'équation ${}^tMU = H$.

D'après le cours, puisque le rang de ${}^tM$ est égal à son nombre de colonnes, on sait que U est unique et $\boxed{\text{qu'il est caractérisé par l'égalité } M\,{}^tMU = MH \text{ i.e. } U = (M\,{}^tM)^{-1}MH.}$

c) Si l'on connaît les lois des $Y_{i,n}$ alors on connait $\Lambda(\langle \alpha, x^{(i)}\rangle)$, donc puisque Λ est injective, on connaît pour les produits scalaires $\langle \alpha, x^{(i)}\rangle$ donc pour $i \in [\![1,k]\!]$.

Pour pouvoir déterminer α de manière unique il est nécessaire que, si pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on a $\langle \alpha, x^{(i)}\rangle = 0$ alors α est le vecteur nul.

Donc l'orthogonal de $\text{Vect}(x^{(1)}, ..., x^{(k)})$ doit être réduit au vecteur nul i.e. $\text{Vect}(x^{(1)}, ..., x^{(k)}) = \mathbb{R}^p$ ce qui signifie que $\boxed{rg(M) = p.}$

16.a) On est bien en présence d'une suite de variables aléatoires ne dépendant pas des paramètres à estimer.

La fonction L est la réciproque de Λ qui possède les propriétés de la fonction F intervenant dans la partie III. D'où en appliquant les résultats de la partie III, $(T_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\langle \alpha, x^{(i)}\rangle$ d'où d'après le cours, $(c_iT_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $c_i\langle \alpha, x^{(i)}\rangle$.

De plus $\mathbf{P}_\theta\left(\left[\left|\sum_{k=1}^{k} c_i T_{i,n} - \sum_{k=1}^{k} c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = \mathbf{P}_\theta\left(\left[\left|\sum_{k=1}^{k} c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \varepsilon\right]\right)$

Or $\left|\sum_{k=1}^{k} c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \leqslant \sum_{k=1}^{k} \left|c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right|$ d'où

$$\mathbf{P}_\theta\left(\left[\left|\sum_{k=1}^{k} c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \mathbf{P}_\theta\left(\left[\sum_{k=1}^{k} \left|c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \varepsilon\right]\right)$$

De plus $\left[\sum_{k=1}^{k} \left|c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \varepsilon\right] \subset \bigcup_{j=1}^{k} \left[\left|c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{k}\right]$

d'où

$$\mathbf{P}_\theta\left(\left[\sum_{k=1}^{k} \left|c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}_\theta\left(\left[\left|c_i T_{i,n} - c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{k}\right]\right)$$

d'après l'inégalité de Boole.

Or cette somme tend vers 0 quand $n \to +\infty$ ce qui permet d'en conclure que :

$$\mathbf{P}_\theta\left(\left[\left|\sum_{k=1}^{k} c_i T_{i,n} - \sum_{k=1}^{k} c_i\langle\alpha, x^{(i)}\rangle\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \to 0$$

quand $n \to +\infty$ ce qui achève la démonstration.

---

b) D'après la question précédente,

$\boxed{A_{j,n} \text{ est une combinaison linéaire des } T_{i,n} \text{ pour } i \in [\![1, k]\!] \text{ donc est un estimateur}}$ et,

$(A_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la j-ième composante de $(M\,{}^tM)^{-1}M \begin{pmatrix} \langle\alpha, x^{(1)}\rangle \\ \vdots \\ \langle\alpha, x^{(k)}\rangle \end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix} \langle\alpha, x^{(1)}\rangle \\ \vdots \\ \langle\alpha, x^{(k)}\rangle \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$, d'où $(M\,{}^tM)^{-1}M \begin{pmatrix} \langle\alpha, x^{(1)}\rangle \\ \vdots \\ \langle\alpha, x^{(k)}\rangle \end{pmatrix} = (M\,{}^tM)^{-1}M\,{}^tM \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$.

D'où

$$\boxed{(A_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } \alpha_j}$$

.