BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

MATHÉMATIQUES 2S (Épreuve n° 283)
ANNÉE 2016
Épreuve conçue par HEC Paris/ESCP Europe
Voie économique et commerciale

Partie I : simulation d'une variable aléatoire à densité

1. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$ est convergente parce que :

- l'intégrande $h : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ est continu sur $]0,+\infty[$;
- h est équivalent en 0 à la fonction positive de référence $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrale sur $]0,1]$ est convergente ;
- h est équivalent en $+\infty$ à la fonction positive de référence $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ dont l'intégrale sur $[1,+\infty[$ est convergente.

b) Soit V une variable aléatoire telle que $V(\Omega) = [0, \pi/2[$, suivant la loi uniforme sur cet intervalle. On pose $X = \tan^2(V)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$[X \leq x] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ [0 \leq V \leq \arctan(\sqrt{x})] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas, $[X \leq x]$ est bien un élément de la tribu $\mathcal{A}$, ce qui prouve que X est une variable aléatoire (sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$).

Lorsque x est positif, la probabilité de l'événement $[0 \leq V \leq \arctan(\sqrt{x})]$ est égale à $\dfrac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{x})$ puisque V suit la loi uniforme sur $[0, \pi/2[$.

La fonction de répartition de X est donc donnée par :

$$F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Comme cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, X est une variable aléatoire à densité.

c) En déduire que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Pour tout $x > 0$, la dérivée de F_X en x est donnée par :

$$F_X'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{2}{\pi(1+\sqrt{x}^2)} = f(x)\ .$$

Il en résulte que la fonction à valeurs positives f, qui coïncide avec la dérivée de F_X en tout point de $\mathbb{R}^*$, est une densité de la variable aléatoire $X = \tan^2(V)$.

2. a) Compléter le code scilab de la fonction suivante pour qu'elle fournisse une matrice-colonne contenant N simulations indépendantes de la variable X.

```
function x=simulX(N)
  u=rand(N,1);
  x=ones(u);
  for i=1 :N
    x(i,1)=(tan(%pi/2*u(i,1)))^2
  end;
endfunction
```

b) Après avoir affecté une valeur à la variable N, on exécute les commandes suivantes :

```
x=simulX(N);
y=0;
for i=1 :N if x(i,1)>1 then y=y+1; end end
q=y/N
```

Trouver la loi d'une variable aléatoire dont la valeur de y est, en fin de boucle, une simulation. De quel nombre peut-on s'attendre que q soit proche lorsque la valeur affectée à N est grande, et pourquoi ?

La valeur de y en fin de boucle correspond à une simulation de $Y = \sum_{i=1}^{N} 1_{X_i>1}$ où $X_1, X_2, \ldots$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

La variable Y est donc la somme de N variables indépendantes de Bernouilli, de paramètre

$$P([X > 1]) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{1}) = 1 - \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, 1/2)$, dont la valeur de y en fin de boucle est donc une simulation.

Lorsque N tend vers l'infini, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1_{X_i>1}$ converge en probabilité vers $1/2$ quand n tend vers l'infini, de par la loi (faible) des grands nombres.

On peut donc s'attendre à ce q soit proche de 0.5 lorsque la valeur affectée à N est grande.

3. X désigne une variable aléatoire à densité, dont la fonction de répartition est notée F_X.
Pour tout $p \in]0,1[$, on note $K_p = \{x \in \mathbb{R}\,;\, F_X(x) = p\}$ et $J_p = \{x \in \mathbb{R}\,;\, F_X(x) < p\}$.

a) Justifier qu'aucun des deux ensembles K_p et J_p n'est vide et prouver que, si a est un élément de J_p et b un élément de K_p, on a nécessairement : $a < b$.

• K_p n'est pas vide, par le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction de répartition continue F_X qui prend toutes les valeurs comprises entre ses limites 0 et 1 en $\pm\infty$.

• J_p n'est pas vide puisque F_X, qui tend vers 0 en $-\infty$, prend des valeurs arbitrairement proches de 0.

• Soit $a \in J_p$ et $b \in K_p$.
Comme F_X est croissante et $F_X(a) < F_X(b)$, on a nécessairement $a < b$ (par contraposition de l'implication $b \leq a \Longrightarrow F_X(b) \leq F_X(a)$).

b) On pose $G_X(p) = \mathrm{Inf}(K_p)$.

Justifier l'existence de $G_X(p)$ et démontrer l'égalité : $F_X\big(G_X(p)\big) = p$.

D'après les résultats précédents, l'ensemble K_p est non vide et minoré. Il admet donc une borne inférieure, ce qui assure l'existence de $G_X(p)$.
Comme F_X est continue, l'ensemble K_p est fermé. Il contient donc sa borne inférieure $G_X(p)$, qui vérifie par conséquent :

$$F_X\big(G_X(p)\big) = p\ .$$

c) | En déduire, pour tout réel x, l'équivalence : $x < G_X(p) \Longleftrightarrow F_X(x) < p$. |

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geq G_X(p)$, la croissance de F_X prouve que : $F_X(x) \geq F_X\big(G_X(p)\big) = p$.
- Si $x < G_X(p)$, x ne peut pas appartenir à K_p puisque $G_X(p)$ est le plus petit élément de l'ensemble K_p. Par croissance de F_X, on a aussi, $F_X(x) \leq F_X\big(G_X(p)\big) = p$. Il en résulte que nécessairement $F_X(x)$ est strictement inférieur à p.

On a ainsi établi l'équivalence : $x < G_X(p) \Longleftrightarrow F_X(x) < p$.

d) Soit U une variable aléatoire telle que $U(\Omega) =]0,1[$ et suivant la loi uniforme sur cet intervalle.

Montrer que si $G_X : p \longmapsto G_X(p)$ est la fonction définie sur $]0,1[$ dans la question précédente, alors la variable aléatoire $G_X(U)$ suit la même loi que X.

Pour tout réel x, on obtient en utilisant 3.c :

$$P\big([G_X(U) \leq x]\big) = 1 - P\big([x < G_X(U)]\big) = 1 - P\big([F_X(x) < U]\big) = 1 - \big(1 - F_X(x)\big) = F_X(x)\ .$$

La variable aléatoire $G_X(U)$ a la même fonction de répartition, donc la même loi que X.

e) | Trouver la fonction G_X dans le cas où X admet pour densité la fonction f de la première question. |

Dans le cas où X admet f pour densité, la fonction F_X réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$, dont G_X est la bijection réciproque, définie par :

$$\forall p \in]0,1[,\ G_X(p) = \Big(\tan\big(\frac{\pi p}{2}\big)\Big)^2$$

ce qui correspond à l'expression utilisée dans le script de la fonction « simulX » en scilab.

Partie II : fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et F la fonction de répartition conjointe de X et Y.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer que la fonction $y \longmapsto F(x, y)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si y et y' sont deux nombres réels tels que $y \leq y'$, alors l'événement $[X \leq x] \cap [Y \leq y]$ est inclus dans l'événement $[X \leq x] \cap [Y \leq y']$.
La probabilité du premier est donc inférieure ou égale à celle du second, autrement dit :

$$F(x, y) \leq F(x, y') .$$

b) Établir l'égalité : $[X \leq x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X \leq x] \cap [Y \leq n])$.

• L'inclusion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X \leq x] \cap [Y \leq n]) \subseteq [X \leq x]$ est évidente puisque chacun des événements $[X \leq x] \cap [Y \leq n]$ est inclus dans l'événement $[X \leq x]$.

• Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leq x$.
Pour tout entier $n \geq Y(\omega)$, ω est un élément de $[X \leq x] \cap [Y \leq n]$ ce qui prouve que ω appartient à la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X \leq x] \cap [Y \leq n])$.
Par double inclusion, on a ainsi établi l'égalité : $[X \leq x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ([X \leq x] \cap [Y \leq n])$.

c) Démontrer que $F(x, y)$ tend vers $P([X \leq x])$ quand le nombre réel y tend vers $+\infty$.

La suite des événements $[X \leq x] \cap [Y \leq n]$ étant croissante, la propriété de limite monotone des probabilités permet d'affirmer que $P([X \leq x] \cap [Y \leq n]) = F(x, n)$ tend vers $P([X \leq x])$ quand l'entier n tend vers l'infini.
Comme la fonction $y \longmapsto F(x, y)$ est croissante, il en résulte que $F(x, y)$ tend vers $P([X \leq x])$ quand le réel y tend vers $+\infty$.

Remarque
Pour éviter d'utiliser des suites, on peut procéder par encadrement.
Pour tout réel x fixé, on a en effet

$$0 \leq P([X \leq x]) - F(x, y) = P([X \leq x] \cap [Y > y]) \leq P([Y > y]) = 1 - F_Y(y)$$

qui tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, puisque la fonction de répartition F_Y de Y tend vers 1 en $+\infty$.

d) Quelle est la limite de $F(x, y)$ quand y tend vers $-\infty$?

On prouve que $F(x, y)$ tend vers 0 quand y tend vers $-\infty$, en utilisant la double inégalité $0 \leq F(x, y) \leq P([Y \leq y])$ et le fait que la fonction de répartition de Y tend vers 0 en $-\infty$.

e) Soit a, a', b, b' quatre nombres réels vérifiant $a \leq a'$ et $b \leq b'$.

On pose $A = [a < X \leq a']$ et $B = [b < Y \leq b']$.

i) Exprimer la probabilité $P(A \cap B)$ en fonction de $P([X \leq a] \cap B)$ et $P([X \leq a'] \cap B)$.

$$P(A \cap B) = P([X \leq a'] \cap B) - P([X \leq a] \cap B) .$$

ii) $\boxed{\text{Établir l'égalité : } P(A \cap B) = F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b) \cdot}$

Comme $P([X \leq a'] \cap B)$ est égal à $P([X \leq a'] \cap [Y \leq b'] - P([X \leq a'] \cap [Y \leq b]$ et $P([X \leq a] \cap B)$ à $P([X \leq a] \cap [Y \leq b'] - P([X \leq a] \cap [Y \leq b]$, on déduit de a) l'égalité :

$$P(A \cap B) = F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b) \cdot$$

Dans les questions 5 et 6, on note U et V deux v.a.r. suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$ et $F_{U,V)}$ leur fonction de répartition conjointe.
On note C la restriction de $F_{U,V)}$ à $[0, 1]^2$:

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, \ C(u, v) = P([U \leq u] \cap [V \leq v]) \ .$$

Pour tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$, on note : $\begin{cases} C_+(u, v) = \text{Min}\{u, v\} \\ C_-(u, v) = \text{Max}\{u + v - 1, 0\} \end{cases}$.

5. Soit $(u, v) \in [0, 1]^2$.

a) $\boxed{\text{Comparer les trois événements } \overline{[U > u] \cup [V > v]}, \ [U \leq u] \cap [V \leq v] \text{ et } [U \leq u].}$

$$\overline{[U > u] \cup [V > v]} = [U \leq u] \cap [V \leq v] \subseteq [U \leq u]$$

b) $\boxed{\text{Justifier la double inégalité : } \quad u + v - 1 \leq C(u, v) \leq u \ .}$

- De l'inclusion $[U \leq u] \cap [V \leq v] \subseteq [U \leq u]$, on déduit immédiatement

$$C(u, v) = P([U \leq u] \cap [V \leq v]) \leq P([U \leq u]) = u \ .$$

- De l'égalité $[U \leq u] \cap [V \leq v] = \overline{[U > u] \cup [V > v]}$, on déduit par l'inégalité de Boole :

$$C(u, v) = 1 - P([U > u] \cup [V > v]) \geq 1 - P([U > u]) - P([V > v]) = 1 - (1 - u) - (1 - v) = u + v - 1 \cdot$$

c) $\boxed{\text{En déduire l'encadrement : } \quad C_-(u, v) \leq C(u, v) \leq C_+(u, v) \cdot}$

Soit $(u, v) \in [0, 1]^2$.

- Comme $C(u, v) \geq u + v - 1$ et $C(u, v) \geq 0$, on a bien :

$$C(u, v) \geq \max\{u + v - 1, 0\} = C_-(u, v) \ .$$

- Par symétrie des rôles de U et V, on a aussi bien $C(u, v) \leq v$ que $C(u, v) \leq u$. D'où :

$$C(u, v) \leq \min\{u, v\} = C_+(u, v) \ .$$

6. a) $\boxed{\text{Calculer } F_{(U,U)}(x, y) \text{ selon les valeurs du couple } (x, y) \text{ de } \mathbb{R}^2.}$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$F_{(U,U)}(x, y) = P([U \leq x] \cap [U \leq y]) = P([U \leq \min\{x, y\}]) = \begin{cases} 0 & \text{si } \min\{x, y\} < 0 \\ \min\{x, y\} & \text{si } 0 \leq \min\{x, y\} \leq 1 \\ 1 & \text{si } \min\{x, y\} > 1 \end{cases} \cdot$$

d'où finalement :

$$F_{(U,U)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } x > y \\ 1 & \text{si } x > 1 \text{ et } y > 1 \end{cases} \ .$$

b) Représenter dans un repère orthonormé une courbe de niveau pour la fonction de deux variables $F_{(U,U)}$, associée à une valeur de cette fonction strictement comprise entre 0 et 1, et hachurer sur la même figure l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels $F_{(U,U)}(x, y) = x$.

- Soit $p \in]0, 1[$.

La courbe de niveau p pour $F_{(U,U)}$, c'est-à-dire $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, F_{(U,U)}(x, y) = p\}$ est la réunion de la demi-droite verticale $\{(p, y) \,;\, y \geq p\}$ et de la demi-droite horizontale $\{(x, p) \,;\, x \geq p\}$.

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, F_{(U,U)}(x, y) = x\} = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \,;\, x \leq y\}$ est l'ensemble des points situés entre les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$, et au dessus de la première bissectrice.

c) Démontrer que C est égale à C_+ si et seulement si les deux variables aléatoires U et V sont égales presque sûrement.

Pour que C soit égale à C_+, il faut et suffit que $F_{(U,V)}$ soit égale à $F_{(U,U)}$, puisque toutes les fonctions de répartition conjointes de deux variables de loi $\mathcal{U}[0, 1]$ coïncident hors du carré $[0, 1]^2$.
Par conséquent, C est égale à C_+ si et seulement si les couples (U, V) et (U, U) ont la même loi, ce qui est vrai bien sûr si U et V sont égales presque sûrement, mais en fait seulement dans ce cas.
En effet, si les vecteurs aléatoires (U, V) et (U, U) ont la même loi, alors les variables aléatoires réelles $U - V$ et $U - U$ suivent la même loi (d'après le rappel précédant l'énoncé de la question), ce qui prouve que $P([U = V]) = P([U - V = 0]) = P([U - U = 0]) = 1$.

d) Calculer la fonction de répartition conjointe $F_{(U,1-U)}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$ et donner une condition nécessaire et suffisante portant sur U et V pour que C soit égale à C_-.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$F_{(U,1-U)}(x, y) = P([U \leq x] \cap [U \geq 1 - y]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 1 - x \leq y \leq 1 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y > 1 \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } x > 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \text{ et } y > 1 \end{cases} .$$

Pour que C soit égale à C_-, il faut et suffit que $F_{(U,V)}$ soit égale à $F_{(U,1-U)}$, c'est-à-dire que V et $1 - U$ soient égales presque sûrement.

Partie III : copules

On appelle *copule* toute fonction Φ à valeurs réelles, définie sur $[0, 1]^2$, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall u \in [0, 1],\ \Phi(u, 0) = \Phi(0, u) = 0$
- $\forall u \in [0, 1],\ \Phi(u, 1) = \Phi(1, u) = u$
- $\forall (u, u', v, v') \in [0, 1]^4, \quad u \leq u' \ \&\ v \leq v' \implies \Phi(u', v') - \Phi(u', v) - \Phi(u, v') + \Phi(u, v) \geq 0$

On appelle *copule à densité* toute copule Φ dont la restriction à l'ouvert $]0, 1[^2$ est de classe C^2.

7. Exemples issus de la partie 2

a) Soit U et V deux variables aléatoires suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$ et C la restriction de leur fonction de répartition conjointe à $[0, 1]^2$.

Vérifier que C est une copule, qu'on appellera la copule associée au couple (U, V).

L'application C est une copule parce que :

- $\forall u \in [0,1],\ C(u,0) = P([U \leq u] \cap [V \leq 0]) = 0$ puisque $P([V \leq 0]) = 0$;
- $\forall u \in [0,1],\ C(0,u) = P([U \leq 0] \cap [V \leq u]) = 0$ puisque $P([U \leq 0]) = 0$;
- $\forall u \in [0,1],\ C(u,1) = P([U \leq u] \cap [V \leq 1]) = P([U \leq u]) = u$;
- $\forall u \in [0,1],\ C(1,u) = P([U \leq 1] \cap [V \leq u]) = P([V \leq u]) = u$;
- Si $(u,u',v,v') \in [0,1]^4$, avec $u \leq u'$ et $v \leq v'$, alors

$$\Phi(u',v') - \Phi(u',v) - \Phi(u,v') + \Phi(u,v) = P([u < U \leq u'] \cap [v < V \leq v']) \geq 0 .$$

b) En déduire que les trois fonctions $\Pi : (u,v) \longmapsto u\,v$, $C_+ : (u,v) \longmapsto \text{Min}\{u,v\}$ et $C_- : (u,v) \longmapsto \text{Max}\{u+v-1, 0\}$ sont des copules.

- La fonction $\Pi : (u,v) \longmapsto u\,v$, définie sur $[0,1]^2$ est une copule parce que c'est la restriction à $[0,1]^2$ de la fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi $\mathcal{U}[0,1]$.
- La fonction C_+ est une copule parce que c'est la restriction à $[0,1]^2$ de la fonction de répartition conjointe de U avec elle-même lorsque U suit la loi $\mathcal{U}[0,1]$.
- La fonction C_- est une copule parce que c'est la restriction à $[0,1]^2$ de la fonction de répartition conjointe de U et $1-U$ lorsque U suit la loi $\mathcal{U}[0,1]$.

8. Soit Φ une copule à densité et $(a,b) \in]0,1[^2$.

Pour tout couple (h,k) de nombres réels strictement positifs tels que $(a+h, b+k) \in]0,1[^2$, on note :

$$G(h,k) = \frac{1}{h\,k}\Big(\Phi(a+h,b+k) - \Phi(a+h,b) - \Phi(a,b+k) + \Phi(a,b)\Big) \cdot$$

a) Soit h un nombre réel non nul tel que $a+h \in]0,1[$.

Justifier que $G(h,k)$ admet une limite $H(h)$ quand k tend vers 0 et exprimer $H(h)$ à l'aide de la dérivée partielle $\partial_2(\Phi)$ de Φ par rapport à sa seconde variable.

Par définition de la dérivée partielle $\partial_2(\Phi)$ au point (a,b) on a :

$$\partial_2(\Phi)(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{\Phi(a,b+k) - \Phi(a,b)}{k} .$$

Par définition de la dérivée partielle $\partial_2(\Phi)$ au point $(a+h,b)$ on a :

$$\partial_2(\Phi)(a+h,b) = \lim_{k \to 0} \frac{\Phi(a+h,b+k) - \Phi(a+h,b)}{k} .$$

Par conséquent, on a :

$$\lim_{k \to 0} G(h,k) = H(h) = \frac{\partial_2(\Phi)(a+h,b) - \partial_2(\Phi)(a,b)}{h} .$$

b) Trouver la limite de $H(h)$ quand h tend vers 0 et en déduire que la densité de Φ est positive ou nulle au point (a,b).

Par définition de la dérivée partielle seconde croisée $\partial^2_{1,2}(\Phi)$ au point (a,b) on a :

$$\lim_{h \to 0} H(h) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_2(\Phi)(a+h,b) - \partial_2(\Phi)(a,b)}{h} = \partial^2_{1,2}(\Phi)(a,b) .$$

Pour tout couple (h,k) de nombres réels strictement positifs tels que $(a+h,b+k) \in]0,1[^2$, $G(h,k)$ est positif ou nul. Comme on peut faire tendre k vers 0_+, puis h vers 0_+ en respectant la condition d'appartenance de $(a+h, b+k)$ à $]0,1[^2$, il en résulte que la limite trouvée précédemment est positive ou nulle :

$$\partial^2_{1,2}(\Phi)(a,b) \geq 0 .$$

9. Soit φ une application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]^2$ et de classe C^2 sur $]0,1[^2$.

Pour tout $(u,u',v,v') \in [0,1]^4$, on pose :

$$\psi(u,u',v,v') = \varphi(u',v') - \varphi(u',v) - \varphi(u,v') + \varphi(u,v) \cdot$$

a) Pour tout $(u,u',v,v') \in]0,1[^4$, justifier l'égalité :

$$\psi(u,u',v,v') = \int_v^{v'} \Big(\int_u^{u'} \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y \ .$$

Comme $x \longmapsto \partial_2(\varphi)(x,y)$ est une primitive de la fonction continue $x \longmapsto \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y)$ sur le segment $[u,u']$, on a :

$$\int_u^{u'} \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y)\,\mathrm{d}x = \partial_2(\varphi)(u',y) - \partial_2(\varphi)(u,y) \ .$$

Comme $y \longmapsto \varphi(u',y)$ est une primitive de la fonction continue $x \longmapsto \partial_2(\varphi)(u',y)$ sur le segment $[v,v']$, on a :

$$\int_v^{v'} \Big(\partial_2(\varphi)(u',y)\Big)\,\mathrm{d}y = \varphi(u',v') - \varphi(u',v) \ .$$

Comme $y \longmapsto \varphi(u,y)$ est une primitive de la fonction continue $x \longmapsto \partial_2(\varphi)(u,y)$ sur le segment $[v,v']$, on a :

$$\int_v^{v'} \Big(\partial_2(\varphi)(u,y)\Big)\,\mathrm{d}y = \varphi(u,v') - \varphi(u,v) \ .$$

Il en résulte que :

$$\int_v^{v'} \Big(\int_u^{u'} \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y = \varphi(u',v') - \varphi(u',v) - \varphi(u,v') + \varphi(u,v) = \psi(u,u',v,v') \ .$$

b) Soit u et u' deux nombres réels tels que : $0 \le u \le u' \le 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{3n} + (1 - \dfrac{1}{n})u$ et $u'_n = \dfrac{2}{3n} + (1 - \dfrac{1}{n})u'$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier les inégalités strictes : $0 < u_n < u'_n < 1$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \ge \dfrac{1}{3n} > 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u'_n - u_n = \dfrac{1}{3n} + (1 - \dfrac{1}{n})(u' - u) \ge \dfrac{1}{3n} > 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u'_n \le \dfrac{2}{3n} + (1 - \dfrac{1}{n}) = 1 - \dfrac{1}{3n} < 1$.

c) Soit $T_0 = \{(u,u',v,v') \in \mathbb{R}^4\,;\, 0 < u < u' < 1,\ 0 < v < v' < 1\}$.

Montrer que si la fonction ψ est positive ou nulle sur T_0, elle l'est aussi sur l'ensemble

$$T = \{(u,u',v,v') \in \mathbb{R}^4\,;\, 0 \le u \le u' \le 1,\ 0 \le v \le v' \le 1\} \ .$$

On suppose ψ est positive ou nulle sur T_0.
Soit $(u,u',v,v') \in T$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3n} + (1 - \dfrac{1}{n})u \\ u'_n = \dfrac{2}{3n} + (1 - \dfrac{1}{n})u' \\ v_n = \dfrac{1}{3n} + (1 - \dfrac{1}{n})v \\ v'_n = \dfrac{2}{3n} + (1 - \dfrac{1}{n})v' \end{cases}$.

D'après le résultat précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_n, u'_n, v_n, v'_n) \in T_0$ et par conséquent $\psi(u_n, u'_n, v_n, v'_n) \geq 0$.
Comme (u_n, u'_n, v_n, v'_n) tend vers (u, u', v, v') quand n tend vers l'infini, on obtient par continuité de φ donc de ψ :

$$\psi(u, u', v, v') = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \psi(u_n, u'_n, v_n, v'_n) \geq 0 \cdot$$

d) En déduire que, pour que φ soit une copule, il suffit qu'elle vérifie les trois propriétés :

- $\forall u \in [0,1],\ \varphi(u,0) = \varphi(0,u) = 0$
- $\forall u \in [0,1],\ \varphi(u,1) = \varphi(1,u) = u$
- $\forall (x,y) \in]0,1[^2,\quad \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y) \geq 0$

On suppose que l'application φ, qui est continue sur $[0,1]^2$ et de classe C^2 sur $]0,1[^2$, vérifie de plus les trois propriétés indiquées.
De la formule démontrée en a), on déduit que ψ est positive ou nulle sur T_0, donc sur T d'après le résultat de c).
On a donc bien, pour tout $(u, u', v, v') \in [0,1]^4$, tel que $u \leq u'$ et $v \leq v'$:

$$\varphi(u', v') - \varphi(u', v) - \varphi(u, v') + \varphi(u, v) \geq 0 \ .$$

Il en résulte d'après les deux premières propriétés que φ est une copule (à densité).

Partie IV : familles de copules et simulation

10. Soit M la fonction définie sur $[0,1]^2$ par :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2, M(u,v) = uv(u + v - uv) \ .$$

a) Prouver que la fonction $(u,v) \longmapsto u + v - 2uv$ admet sur $[0,1]^2$ un minimum global c et un maximum global d, et les calculer.

Soit $S(u,v) = u + v - 2uv$.

- $S(u,v) = u(1-u) + v(1-v) + (u-v)^2 \geq 0$ pour tout $(u,v) \in [0,1]^2$.
  D'où $c = 0$ puisque $S(0,0) = 0$.
- $S(u,v) \leq u + v - uv = 1 - (1-u)(1-v) \leq 1$ pour tout $(u,v) \in [0,1]^2$.
  D'où $d = 1$ puisque $S(1,0) = 1$.

Cette argumentation est plus rapide que la méthode habituelle qui consisterait :
• à justifier d'abord l'existence de c et d par la continuité de la fonction S sur la partie fermée et bornée $[0,1]^2$ de $\mathbb{R}^2$;

• à constater ensuite que l'unique point critique $(1/2, 1/2)$ [1] sur l'ouvert $]0,1[^2$ ne correspond ni à un maximum local, ni à un minimum local, [2] ce qui prouve que les points où les extrema de S sont atteints sont à chercher sur le bord du carré $[0,1]^2$

• à conclure en utilisant les égalités $S(0,u) = S(u,0) = u$ et $S(1,u) = S(u,1) = 1-u$.

b) Montrer que M est une copule à densité.

La fonction M est une copule à densité parce qu'elle est continue sur $[0,1]^2$, de classe C^2 sur l'ouvert $]0,1[^2$ et vérifie les trois propriétés :

- $\forall u \in [0,1],\ M(u,0) = M(0,u) = 0$
- $\forall u \in [0,1],\ M(u,1) = M(1,u) = u$
- $\forall (x,y) \in]0,1[^2,\quad \partial^2_{1,2}(M)(x,y) = 2\,S(x,y) \geq 0$.[3]

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et M_θ la fonction définie sur $[0,1]^2$ par :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2, M_\theta(u,v) = (1-\theta)\,uv + \theta M(u,v)) \cdot$$

Pour quelles valeurs de θ la fonction M_θ est-elle une copule ?

Pour tout réel θ, on a :

- $\forall u \in [0,1],\ M_\theta(u,0) = M_\theta(0,u) = 0$
- $\forall u \in [0,1],\ M_\theta(u,1) = M_\theta(1,u) = u$

La fonction M_θ est est continue sur $[0,1]^2$, de classe C^2 sur $]0,1[^2$ et sa dérivée partielle seconde croisée est :

$$\partial^2_{1,2}(M_\theta) = 1 - \theta + 2\theta\, S\ .$$

Lorsque $\theta = 0$, M_θ est la copule Π.
Si $\theta < 0$, le minimum de $\partial^2_{1,2}(M_\theta)$ est $1 - \theta + 2\theta\, d = 1 + \theta$, qui est positif ou nul lorsque $\theta \geq -1$.
Si $\theta > 0$, le minimum de $\partial^2_{1,2}(M_\theta)$ est $1 - \theta + 2\theta\, c = 1 - \theta$, qui est positif ou nul lorsque $\theta \leq 1$.

Il en résulte que M_θ est une copule (à densité) si et seulement si $-1 \leq \theta \leq +1$.

11. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et U_0, V_0, U_1, V_1 quatre variables aléatoires suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

On suppose que (U_0, V_0), (U_1, V_1) et N sont mutuellement indépendants.

a) Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $U_N(\omega) = \begin{cases} U_0(\omega) & \text{si } N(\omega) = 0 \\ U_1(\omega) & \text{si } N(\omega) = 1 \end{cases}$ et $V_N(\omega) = \begin{cases} V_0(\omega) & \text{si } N(\omega) = 0 \\ V_1(\omega) & \text{si } N(\omega) = 1 \end{cases}$.

Montrer que U_N et V_N sont des variables aléatoires et suivent chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout réel x, $[U_N \leq x] = ([U_0 \leq x] \cap [N=0]) \cup ([U_1 \leq x] \cap [N=1]) \in \mathcal{A}$.
Il en résulte que U_N est une variable aléatoire (sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$).
De plus, pour tout nombre réel x, on a, par indépendance de U_0 et N d'une part, de U_1 et N d'autre part

$$P([U_N \leq x]) = P([U_0 \leq x] \cap [N=0]) + P([U_1 \leq x] \cap [N=1]) = (1-p)P([U_0 \leq x]) + p\,P([U_1 \leq x])$$

d'où

$$P([U_N \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Parce que $\partial_1(S)(u,v) = 1 - 2v = 0 \iff v = 1/2$ et $\partial_2(S)(u,v) = 1 - 2u = 0 \iff u = 1/2$.

2. Parce que les valeurs propres ± 2 de la matrice hessienne $H = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ de S en ce point (comme en tout point d'ailleurs) sont de signes opposés.

3. Parce que $\partial_2(M)(x,y) = x^2 + 2xy - 2x^2y$, d'où $\partial^2_{1,2}(M)(x,y) = 2x + 2y - 4xy$.

ce qui prouve que U_N est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Il en est de même bien sûr pour V_N.

b) Exprimer la copule associée au couple (U_N, V_N) à l'aide des copules associées aux deux couples (U_0, V_0) et (U_1, V_1).

En utilisant à nouveau la formule des probabilités totales (et l'indépendance de N vis-à-vis des vecteurs aléatoires (U_0, V_0) et (U_1, V_1)), on obtient :

$$\forall (u, v) \in [0,1]^2, C_{(U_N,V_N)}(u,v) = (1-p)C_{(U_0,V_0)}(u,v) + p\, C_{(U_1,V_1)}(u,v) \cdot$$

12. Soit $p \in]0, 1[$ et C_p la fonction définie sur $[0, 1]^2$ par :

$$\forall\,(u,v) \in [0,1]^2,\ C_p(u,v) = p\,u\,v + (1-p)\,\mathrm{Min}\{u,v\} \cdot$$

a) Justifier que C_p est une copule.

Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et U, V deux variables aléatoires suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$, telles que U, V et N soient mutuellement indépendantes.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $U_N = U$ et $V_N(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } N(\omega) = 0 \\ V(\omega) & \text{si } N(\omega) = 1 \end{cases}$.

D'après 11.b, C_p est la copule associée au couple (U_N, V_N).

b) Proposer une méthode de simulation d'un couple aléatoire (U, V) auquel soit associée la copule C_p et donner le code scilab d'une fonction « simulc » réalisant cette simulation pour toute valeur donnée de p.

Pour simuler un couple aléatoire de copule C_p, on commence par simuler deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$, puis on transforme V en U avec probabilité $1 - p$.

Cet algorithme est appliqué dans la fonction « simulc » ci-dessous.

```
function w=simulc(p)
    u=rand();
    v=rand();
    P=rand();
    if P>p then v=u; end
    w=[u,v]
endfunction
```

13. Soit X et Y deux variables aléatoires à densité, de fonctions de répartition F_X et F_Y.

Pour tout $p \in]0, 1[$, on note : $\begin{cases} G_X(p) = \mathrm{Inf}\big(\{x \in \mathbb{R}\,;\ F_X(x) = p\}\big) \\ G_Y(p) = \mathrm{Inf}\big(\{x \in \mathbb{R}\,;\ F_Y(x) = p\}\big) \end{cases}$.

Soit C la fonction définie sur $[0, 1]^2$ par :

$$C(u,v) = \begin{cases} F_{(X,Y)}\big(G_X(u), G_Y(v)\big) & \text{si } (u,v) \in]0,1[^2 \\ 0 & \text{si } uv = 0 \\ u & \text{si } v = 1 \\ v & \text{si } u = 1 \end{cases}.$$

Démontrer que C est une copule et en déduire un procédé de simulation du couple (X, Y) à partir de la simulation (u, v) d'un couple (U, V) auquel la copule C est associée.

On pose $U = F_X(X)$ et $V = F_Y(Y)$, qui suivent chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$ (en prenant ou non les valeurs 0 et 1), puisque, d'après 3.b :

$$\forall p \in]0, 1[, \ P\big([F_X(X) < p]\big) = P\big([X < G_X(p)]\big) = F_X\big(G_X(p)\big) = p \cdot$$

Dés lors, la copule associée au couple (U, V) est donnée par :

$$C_{(U,V)}(u, v) = P\big([F_X(X) \leq u] \cap [F_Y(Y) \leq v]\big) = \begin{cases} F_{(X,Y)}\big(G_X(u), G_Y(v)\big) & \text{si } (u, v) \in]0, 1[^2 \\ 0 & \text{si } uv = 0 \\ u & \text{si } v = 1 \\ v & \text{si } u = 1 \end{cases} .$$

Pour obtenir une simulation (x, y) du couple (X, Y) à partir de la simulation (u, v) d'un couple (U, V) de copule C, il suffit de poser $x = G_X(u)$ et $y = G_Y(v)$.