Corrigé Maths ESSEC II 2012

Voie E

1) $Y(\Omega) = \{0,1\}$.

Donc Y suit une loi de Bernouilli.

En outre, on a:

$(Y=1) = (X \leq \alpha) \Rightarrow P(Y=1) = P(X \leq \alpha)$

$\Rightarrow P(Y=1) = F(\alpha)$.

En définitive, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(F(\alpha))$, ce qui donne, d'après le cours: $E(Y) = \theta = F(\alpha)$

et $V(Y) = F(\alpha)(1-F(\alpha))$

2) (a) Comme $X_i = 1$ ssi l'individu réagit, et 0 sinon, le nombre d'individus réagissant au stimulus est donné par $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$

En outre, comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes, on a d'après le cours: $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(\alpha))$

Cela donne donc, d'après les propriétés de la loi binomiales,

$E(N) = nF(\alpha)$

$V(N) = nF(\alpha)(1-F(\alpha))$.

(b) On a alors clairement:

$$E\left(\frac{N}{n}\right) \underset{\substack{\text{par linéarité} \\ \text{de l'espérance}}}{=} \frac{E(N)}{n} = F(\alpha) = \theta$$

Donc $\frac{N}{n}$ est un estimateur sans biais de θ

3) (a) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Cela donne, par linéarité de l'espérance:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{n} = n.\frac{m}{n} = m$$

Par indépendance des X_i, on a aussi:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n.\frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2.$$

D'où $\sigma_X = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$

(b) Les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance m/n et de variance σ^2/n non nulle.

Donc, d'après le théorème central-limite, on a:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} \leq a\right) = \underset{\substack{\text{fonction de répartition d'une V.A suivant} \\ \text{la loi } N(0,1)}}{\Phi(a)}$$

Or, ce dernier résultat s'écrit encore:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-u^2/2} du$$

(c) On a: $\theta = P(X \leq \alpha) = P(X-m \leq \alpha - m)$

$$= P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

1ère question

$$= \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

$\left(\text{car } \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow N(0,1)\right)$

(d) $\lim_{\sigma \to +\infty} \left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{\sigma \to +\infty} \left(\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$

par continuité de Φ

On peut interpréter le résultat ainsi: lorsque la variance des petits facteurs devient grande, l'individu a, à terme, une chance sur deux de réagir au stimulus.

4)a) $\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}$

- F est C^1 sur $\mathbb{R}$ car, $\forall y \in \mathbb{R},\ 1+e^{-y} > 0$
- $F'(y) = \frac{-(-e^{-y})}{(1+e^{-y})^2} = \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} > 0$. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

La dérivée de $u \mapsto u^{\alpha}$ est $\alpha u' u^{\alpha-1}$ (ici $\alpha = -1$)

- $\lim_{y \to -\infty} e^{-y} = +\infty \Rightarrow \lim_{y \to -\infty} F(y) = 0$
- $\lim_{y \to +\infty} e^{-y} = 0 \Rightarrow \lim_{y \to +\infty} F(y) = 1$

Donc F est bien la fonction de répartition d'une variable réelle.

(b) $\theta = P(X \leq \alpha) = F(\alpha) = \frac{1}{1+e^{-\alpha}}$

(c) Comme F est C^1 sur $\mathbb{R}$, une densité s'obtient en dérivant la fonction de répartition.

Comme en 4)a), en notant f cette densité, on a:
$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}$

(d) $F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}$ et $F(-y) = \frac{1}{1+e^{y}}$.

Or, $\frac{1}{1+e^{-y}} = \frac{e^y}{e^y(1+e^{-y})} = \frac{e^y}{e^y+1} = e^y \cdot \frac{1}{1+e^y} = e^y F(-y)$.

D'où: $F(y) = e^y F(-y)$.

(c) Z admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy$ converge absolument.

$y \mapsto y f(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La question de la convergence ne se pose donc qu'en $-\infty$ et en $+\infty$.

• en $-\infty$

$$y f(y) = \frac{y e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{y e^{-y}}{e^{-2y}} = y e^{y}$$

l'équivalence est compatible avec la fonction puissance

Or, $\lim_{y \to -\infty} y^2 . y e^{y} = 0$ par croissances comparées.

$\Rightarrow y^2 y e^{y} = o(1) \Rightarrow y e^{y} = o\left(\frac{1}{y^2}\right)$

Or, $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{y^2} dy$ converge absolument (Riemann avec $\alpha = 2$)

Donc, par comparaison d'intégrales à terme de signe constant. $\int_{-\infty}^{-1} y e^{y} dy$ converge absolument.

Enfin, par équivalence d'intégrales à terme de signe constant, $\int_{-\infty}^{-1} \frac{y e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} dy$ converge absolument.

attention, on ne peut pas dire "à terme positif" ici !

Selon la même logique, on trouve que $\int_{1}^{+\infty} y f(y) dy$ converge absolument également.

Donc $E(Y)$ existe.

Or, on remarque : $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(y) = \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} = e^{-y}(F(y))^2$

$$= e^{-y}(e^{y}F(-y))^2$$
$$= e^{-y}e^{2y}(F(-y))^2$$
$$= e^{y}(F(-y))^2$$
$$= f(-y)$$

Donc f est paire. Alors, $y \mapsto y f(y)$ est impaire.

Donc, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy$ converge, on a, par imparité de $y \mapsto y f(y)$,

$E(Y) = 0$

Notons qu'ici, l'imparité de $y \mapsto y f(y)$ (qui implique que son intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ vaut 0) ne dispense pas de montrer la convergence ! sinon, le résultat est inutilisable.
Aussi, sur une question ciblée plus précisément sur la relation entre l'imparité et l'intégrale qui vaut 0, il faudrait démontrer le résultat plus soigneusement (mais ici, la question est déjà longue, donc on peut s'en dispenser en copie de concours). Notamment, l'imparité donne (en cas de convergence) : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = \int_{0}^{+\infty} f(y) dy - \int_{0}^{+\infty} f(y) dy = 0$.

(f) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leq x\right) = P\left(\frac{U}{1-U} \leq e^x\right)$ (fonction exp croissante sur $\mathbb{R}$)

$$= P(U \leq e^x(1-U)) \quad (1-U > 0)$$

$$= P(U \leq e^x - e^x U)$$

$$= P(U + e^x U \leq e^x)$$

$$= P(U(e^x+1) \leq e^x)$$

$$= P\left(U \leq \frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x}{e^x+1} \in]0;1[$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leq x\right) = \frac{e^x}{e^x+1}$ car $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$

Or, $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^{-x}+1}$

Donc $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ possède la fonction de répartition de la loi logistique, et suit alors cette loi.

Modèle de Luce

5) Cela veut dire que la probabilité que l'individu choisisse a au sein d'un ensemble fini d'action T revient à la probabilité que l'individu restreigne son choix à $S \subset T$, puis qu'il choisisse a au sein de S.

Donc, en termes de probabilités conditionnelles: La probabilité que l'individu choisisse a sachant qu'il a restreint son choix à T est égale à la probabilité qu'il restreigne son choix à S sachant qu'il l'a déjà restreint à T, puis qu'il choisisse a sachant qu'il a restreint son choix à S.

6) (a) Dans ce genre de question complexe, il peut être judicieux d'éteindre son cerveau et de calculer bêtement.

$$\frac{v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)} = \frac{k P_A(a)}{\sum_{b\in S} k P_A(b)} = \frac{k P_A(a)}{k \sum_{b\in S} P_A(b)} = \frac{P_A(a)}{P_A(S)}$$

Or, (*) donne: $P_A(a) = P_A(S) P_S(a) \iff \frac{P_A(a)}{P_A(S)} = P_S(a)$.

(b) $\forall a \in S$, $P_S(a) = \frac{v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)}$ et $P_S(a) = \frac{w(a)}{\sum_{b\in S} w(b)}$.

Donc $\frac{v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)} = \frac{w(a)}{\sum_{b\in S} w(b)} \iff v(a) = \frac{\sum_{b\in S} v(b)}{\sum_{b\in S} w(b)} w(a)$

Cela donne bien la relation demandée avec $\mu = \frac{\sum_{b\in S} v(b)}{\sum_{b\in S} w(b)} > 0$ car, d'après l'énoncé, $k>0$ et $P_A(a) > 0$.

7) Pour vérifier que l'on définit un système de probabilités, il suffit de vérifier que les $Q_S(a)$ sont positifs, de somme totale égale à 1.

- $\forall a \in S$, $Q_S(a)$ est clairement positive car v est supposée strictement positive
- $\sum_{a\in S} Q_S(a) = \sum_{a\in S} \frac{v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)}$

$$= \frac{\sum_{a\in S} v(a)}{\sum_{b\in S} v(b)} = 1$$ car a et b jouent le même rôle.

• Pour $(S,T) \subset \mathcal{F}^2$, $S \subset T$, $a \in S$:

$$Q_T(S)\, Q_S(a) = \frac{\sum_{a \in S} v(a)}{\sum_{b \in T} v(b)} \cdot \frac{v(a)}{\sum_{b \in S} v(b)}$$

(de même, le numérateur de gauche s'annule avec le dénominateur de droite)

$$= \frac{v(a)}{\sum_{b \in T} v(b)}$$

$$= Q_T(a)$$

Donc $(*)$ est vérifiée.

8) (a) On suppose $v(a) \leq v(b)$

$$P_S(a) = \frac{v(a)}{\sum_{c \in S} v(c)} \quad \text{et } P_S(b) = \frac{v(b)}{\sum_{c \in S} v(c)}$$

on change la notation pour pas rentrer en conflit avec le "vrai" élément b.

On a alors clairement $P_S(a) \leq P_S(b)$

(b) $$P(a,b) = P_{\{a,b\}}(a) \underset{6.a.}{=} \frac{v(a)}{v(a)+v(b)} = \frac{1}{1+\frac{v(b)}{v(a)}}$$

v étant à valeurs strictement positives, on peut poser $p(a) = \ln(v(a))$

soit $v(a) = e^{p(a)}$.

On a donc : $$P(a,b) = \frac{1}{1+\frac{e^{p(b)}}{e^{p(a)}}} = \frac{1}{1+\exp(p(b)-p(a))}$$

(c) D'après la question précédente, on a clairement :

$\alpha_{a,b} = p(a) - p(b)$.

9) (a) D'après $(*)$:

$$\frac{P_T(a)}{P_T(b)} = \frac{P_T(S)\, P_S(a)}{P_T(S)\, P_S(b)} \iff \frac{P_S(a)}{P_S(b)} = \frac{P_T(a)}{P_T(b)}$$

(b) $P_A(V) + P_A(R) + P_A(B) = 1$

$\iff P_A(V) = 1 - 2P_A(R)$ (car $P_A(R) = P_A(B)$).

$\iff P_A(R) = \frac{1-P_A(V)}{2}$ (on note cette égalité Δ)

On utilise l'égalité 9.a. avec $S = \{V,R\}$, $T = A$

$a = V$ et $b = R$

On a alors : $$\frac{\overbrace{P_{\{V,R\}}(V)}^{=1/2}}{\underbrace{P_{\{V,R\}}(R)}_{1/2}} = \frac{P_{(A)}(V)}{P_{(A)}(R)}$$

Ce qui donne en remplaçant, et d'après (Δ) : $1 = P_A(V) / \left(\frac{1-P_A(V)}{2}\right)$

On obtient finalement:

$$P_A(v) = \frac{1}{2} - \frac{P_A(v)}{2} \iff \frac{3}{2} P_A(v) = \frac{1}{2} \iff P_A(v) = \frac{1}{3}$$

Cela n'est pas satisfaisant (car l'individu choisit un bus avec une probabilité $2/3$), notamment par rapport à l'interprétation donnée en 5)

Utilités aléatoires

10) (a) $\forall x \in \mathbb{R}, P(U \leq x) = P(\max(U_1, \dots, U_n) \leq x)$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_1 \leq x)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(U_i \leq x) \text{ par indépendance des } U_i$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$

En particulier, si les U_i ont la même fonction de répartition F, alors: $G_n(x) = (F(x))^n$

(b) On a toujours $F(x) \in [0,1]$

- si $F(x) \in [0,1[$, $\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$
- si $F(x) = 1$, $\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 1$

→ La question est très évasive, mais nous n'avons pas assez d'informations sur la fonction donnée pour être plus précis. Il s'agit de toutes façons d'un cas général, donc il ne faut pas s'en étonner.

(c) $G_n = F \iff \forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = F(x)$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, F(x)^n = F(x)$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 0 \text{ ou } F(x) = 1$

Cela correspond bien à la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante.

11) (a) F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

On sait déjà, donc, que F est continue, croissante, et que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Comme $F'(x) = f(x)$ aux points de continuité de f, et que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, F est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(b) Comme, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \in [0,1]$:

$n \geq m \Rightarrow F(x)^n \leq F(x)^m \Rightarrow F(x + b_n) \leq F(x + b_m)$

selon le théorème de la bijection, F^{-1} est croissante:

$n \geq m \Rightarrow x + b_n \leq x + b_m$

$\Rightarrow b_n \leq b_m$

Il faut bien maîtriser les définitions de la croissance et de la décroissance.

Donc (b_n) est bien décroissante.

(c) Les (Y_j) dépendent de sous-ensembles deux à deux disjoints des (U_i)

Comme les (U_i) sont indépendantes, le lemme des coalitions justifie que les (Y_j) sont indépendantes.

(d) D'après 10a. U_i indépendantes et de même loi, la fonction de répartition de Y_j est F^N

Le nombre de U_i par Y_j est donné par

$$jN - ((j-1)N+1)+1 = jN - jN + N - 1 + 1 = N$$

(e) Si on pose $Y = \max(Y_1, \dots, Y_n)$, alors la fonction de répartition de Y est $(F^N)^n = F^{Nn}$.

D'autre part, la fonction de répartition de Y_j est $x \mapsto F(x)^N = F(x+b_N)$

donc celle de Y est $x \mapsto F(x+b_N)^n = F(x+b_N+b_n)$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x)^{nN} = F(x + b_{Nn}) = F(x + b_N + b_n)$

En appliquant F^{-1}, on obtient donc:

$$x + b_n + b_N = x + b_{nN} \Rightarrow b_{nN} = b_n + b_N$$

(f) Montrons cela par récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k)$: « $b_{n^k} = k b_n$ »

- Pour $k=0$

$b_{n^0} = b_1$ et $0.b_n = 0$. On cherche donc à montrer $b_1 = 0$.

Pour $n=1$, la relation énoncée en 11) s'écrit:

$F(x) = F(x+b_1)$. Donc, par bijectivité de F:

$$x = x + b_1 \Rightarrow b_1 = 0$$

Donc $P(0)$ est vraie

- Montrons maintenant, pour k fixé, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

On suppose $P(k)$ vraie. Montrons qu'alors, $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $b_{n^{k+1}} = (k+1) b_n$.

$$\begin{aligned} b_{n^{k+1}} &= b_{n^k . n} = b_{n^k} + b_n \quad (11e) \\ &= k b_n + b_n \quad (\text{hypothèse}) \\ &= (k+1) b_n \end{aligned}$$

Donc $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_{n^k} = k b_n$.

(g) $p \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$

On a : $2^{k_m} \leq p^m < 2^{k_m+1}$ $\underset{\text{fonction ln strictement croissante}}{\iff}$ $k_m \ln(2) \leq m \ln(p) < (k_m+1)\ln(2)$

$\iff k_m \leq \dfrac{m \ln(p)}{\ln(2)} < k_m + 1$

Il existe un unique entier vérifiant cette condition, qui est la partie entière de $\dfrac{m\ln(p)}{\ln(2)}$

Par propriété de la fonction partie entière, on a par ailleurs:

$$\frac{m\ln(p)}{\ln(2)} - 1 \leq k_m \leq \frac{m\ln(p)}{\ln(2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(p)}{\ln(2)} - \frac{1}{m} \leq \frac{k_m}{m} \leq \frac{\ln(p)}{\ln(2)}.$$

Cela donne, par théorème d'encadrement, pour $m \to +\infty$:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{k_m}{m} = \frac{\ln p}{\ln 2}$$

Il existe donc bien un unique entier k_m qui vérifie ces deux conditions.

(h) Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, $b_{p^m} = m b_p$ (f)

comme b_n est décroissante, on a, avec les notations de 2g :

$$b_{2^{k_m}} \leq b_{p^m} \leq b_{2^{k_m+1}}$$

$$\Leftrightarrow k_m b_2 \leq m b_p \leq (k_m+1) b_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{k_m}{m} b_2 \leq b_p \leq \left(\frac{k_m}{m} + \frac{1}{m}\right) b_2$$

Pour $m \to +\infty$ et par théorème d'encadrement :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\ln p}{\ln 2} b_2 \leq b_p \leq \frac{\ln p}{\ln 2} b_2$$

donc $b_p = \frac{b_2}{\ln(2)} \ln(p) \Rightarrow \gamma = \frac{b_2}{\ln(2)}$ est le réel recherché.

(i) F est C^1 sur $\mathbb{R}$, $F'(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}} > 0$. Donc F est à densité strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} e^{-e^{-x}} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} e^{-e^{-x}} = e^0 = 1$

Donc F est bien une fonction de répartition strictement croissante.

$$\forall n \geq 1, \ F(x)^n = \left(e^{-e^{-x}}\right)^n = e^{-ne^{-x}} = e^{-e^{\ln(n)}e^{-x}}$$

$$= e^{-e^{-(x-\ln(n))}}$$

$$= F(x - \ln(n))$$

Donc F satisfait aux conditions cherchées, avec, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = -\ln(n)$.

12) (a) F est C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc une densité de X est donnée par F' :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F'(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$$

Donc $x \mapsto e^{-x} e^{-e^{-x}}$ est une densité de X.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Z \leq x) = P(e^{-X} \leq x)$

si $x \leq 0$, $P(Z \leq x) = 0$

si $x > 0$, $P(Z \leq x) = P(-X \leq \ln(x))$ (fonction ln croissante)

$$= P(X \geq -\ln(x))$$

$$= 1 - \exp(-e^{\ln(x)})$$

$$= 1 - \exp(-x)$$

La fonction de répartition de Z est celle d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(c) $P_{(X\leq -\ln x)}(X\leq -\ln(x+u)) = P_{(-X\geq \ln x)}(-X\geq \ln(x+u))$

$= P_{(Z\geq x)}(Z\geq x+u)$

$= P(Z\geq u)$ par absence de

$= P(X\leq -\ln u)$ vieillissement de la loi exponentielle

(d) W vaut 0 si $L=0$ et $\max(Y_1,\dots,Y_k)$ si $L=k$

Soit $b>0$

On a: $W\leq b = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty}(L=k, W\leq b)$

$= (L=0)\sqcup\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}((L=k)\cap(\max(Y_1,\dots,Y_k)\leq b)\right)$

Soit $P(W\leq b) = P(L=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P((L=k)\cap(\max(Y_1,\dots,Y_k)\leq b))$

$= P(L=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(L=k)P(\max(Y_1,\dots,Y_k)\leq b)$ par indépendance de L et des Y_i

$= P(L=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-1}\frac{1}{k!}(1-e^{-b})^k$ (10a)

$= P(L=0) + e^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-e^{-b})^k}{k!}$ - reconnaître une somme exponentielle au premier terme près

$= P(L=0) + e^{-1}(e^{1-e^{-b}}-1)$

$P(W\leq b) = P(L=0) + e^{-e^{-b}} - e^{-1}$

Cela donne finalement, pour $0<a<b$:

$P(a\leq W\leq b) = P(W\leq b) - P(W\leq a)$

$= e^{-e^{-b}} - e^{-e^{-a}}$

$= F(b) - F(a)$

$= P(a\leq X\leq b)$

En outre: $W=0 \iff \begin{cases} L=0 \\ L=k\neq 0 \text{ et } \max(Y_1,\dots,Y_L)=0\end{cases}$

Or, comme, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(Y_k=0)=0$ (Y à densité), on a:

$P(W=0) = P(L=0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = e^{-1}$