CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Soient $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ tels que $PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a\\ -x+y=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b & (1)-(2)\\ y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b & (1)+(2)\end{cases} \Leftrightarrow$ $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}Y$ donc P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2. (a) $P^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\quad B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

   (b) Puisque B est diagonale, on a $B^n=\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

   (c) Commençons par remarquer que $P^{-1}AP=B \Leftrightarrow AP=PB \Leftrightarrow A=PBP^{-1}$. Pour tout entier n, posons $(\mathcal{H}_n)$: « $A^n=PB^nP^{-1}$ ». **Initialisation** $n=0$. On a $A^0=I_2$ et $PB^0P^{-1}=PI_2P^{-1}=PP^{-1}=I_2$ d'où $A^0=PB^0P^{-1}$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie. **Hérédité**. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ pour un entier n alors : $A^{n+1}=A^nA=PB^nP^{-1}PBP^{-1}=PB^nI_2BP^{-1}=PB^nBP^{-1}=PB^{n+1}P^{-1}$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence. Un calcul direct nous donne $PB^n=\begin{pmatrix}1 & 2^n\\ -1 & 2^n\end{pmatrix}$, $\quad A^n=PB^nP^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}2^n-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. (a) Pour tout entier n, posons $(\mathcal{H}_n)$: « $u_n\geqslant 1$ ». **Initialisation** $n=0$. On a $u_0=2\geqslant 1$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie. **Hérédité**. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ pour un entier n alors : $u_{n+1}-1=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}-1=\dfrac{\overbrace{2(u_n-1)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{u_n+3}_{\geqslant 0}}\geqslant 0 \Rightarrow u_{n+1}\geqslant 1$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

   (b) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n=\dfrac{1-u_n^2}{u_n+3}=\dfrac{\overbrace{(1-u_n)}^{\leqslant 0}\overbrace{(1+u_n)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{u_n+3}_{\geqslant 0}}\leqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   (c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.

   (d) Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ alors $\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{3L+1}{L+3}$ et $u_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}$, on obtient $L=\dfrac{3L+1}{L+3}\Leftrightarrow L^2+3L=3L+1\Leftrightarrow L^2=1\Leftrightarrow L=\pm 1$. D'autre part, on a $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant 1$ donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $L\geqslant 1$ d'où $L=1$.

4. (a) Pour tout entier n, posons $(\mathcal{H}_n)$: « $u_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ ». **Initialisation** $n=0$. On a $u_0=2$ et $\dfrac{a_0}{b_0}=\dfrac{2}{1}=2$ d'où $u_0=\dfrac{a_0}{b_0}$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie. **Hérédité**. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ pour un entier n alors : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}=\dfrac{\frac{3a_n}{b_n}+1}{\frac{a_n}{b_n}+3}=\dfrac{\frac{3a_n+b_n}{b_n}}{\frac{a_n+3b_n}{b_n}}=\dfrac{3a_n+b_n}{a_n+3b_n}=\dfrac{2a_{n+1}}{2b_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

   (b) On a $U_{n+1}=AU_n$ donc $U_n=A^nU_0$.

(c) Un calcul direct donne

$$U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2} \\ b_n = \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2}} = \frac{2^n\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{2^n\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

:

EXERCICE 2

1. (a) $g'(x) = 6x^2 - 6 * \frac{1}{x} = \frac{6}{x}\left(x^3 - 1\right)$

(b) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. En outre, on a $g'(x) \geqslant 0 \underset{x \geqslant 0}{\Leftrightarrow} x^3 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ donc le tableau de variations de g est donné par

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

(c) D'après le tableau précédent, on peut affirmer que $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. (a) Puisque $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\ln(x) * \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$. D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to0^+} 2x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 - \infty = -\infty$. D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

(b) $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{3\ln(x)}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\to} 2$ donc $a = 2$. $f(x) - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $b = 0$.

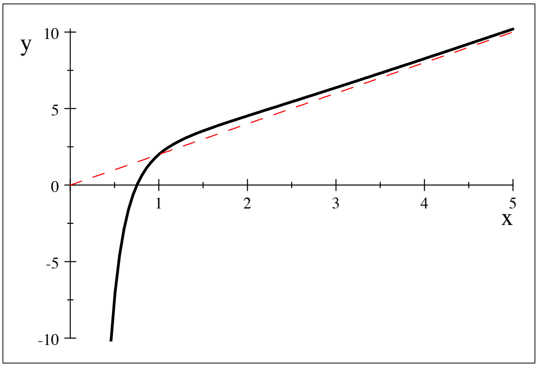
(c) On a $(\mathcal{A}) : y = 2x$ et $f(x) - 2x = \frac{3\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ donc $(\mathcal{A})$ est au dessus de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si $x \geqslant 1$.

3. (a) $f'(x) = 2 + \frac{\frac{3}{x} * x^2 - 3\ln(x)(2x)}{x^4} = 2 + \frac{x(3 - 6\ln(x))}{x^4} = 2 + \frac{3 - 6\ln(x)}{x^3} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{x^3} = \frac{g'(x)}{x^3}$

(b) Puisque g' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et x est positif sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f' est positive également sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi le tableau de variations de f est donné par :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) En gras, $(\mathcal{C}_f)$ et en pointillé $(\mathcal{A})$.



4. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$. Puisque $2n \in]-\infty,+\infty[$, l'équation $f(x) = 2n$ admet bien une et une seule solution sur $]0,+\infty[$.

   (b) Par définition, $f(x_n) = 2n$, $f(1) = 2$ et $f(n) = 2n + \dfrac{3\ln(n)}{n^2}$ donc $f(1) \leqslant f(x_n) \leqslant f(n) \Rightarrow 1 \leqslant x_n \leqslant n$ puisque f est strictement croissante.

   (c) $f(x_n) = 2n \Leftrightarrow 2x_n + \dfrac{3\ln(x_n)}{x_n^2} = 2n \underset{\div(2n)}{\Leftrightarrow} \dfrac{x_n}{n} + \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$

   (d) Comme on a $1 \leqslant x_n \leqslant n \Rightarrow \begin{cases} \ln(1) \leqslant \ln(x_n) \leqslant \ln(n) \\ n \leqslant n(x_n)^2 \leqslant n(n)^2 = n^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant \ln(x_n) \leqslant \ln(n) : (1) \\ \dfrac{1}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n(x_n)^2} \leqslant \dfrac{1}{n} : (2) \end{cases} \underset{(1)*(2)}{\Rightarrow}$ $0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.

   (e) D'après les croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc le théorème d'encadrement justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$.

EXERCICE 3

I. Probabilités conditionnelles.

1. $P(D) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$, $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = \dfrac{19}{20}$, $P_D(\overline{A}) = \dfrac{90}{100} = \dfrac{9}{10}$, $P_D(A) = 1 - P_D(\overline{A}) = \dfrac{1}{10}$, $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5}$.

2. $P(A\cap D) = P(D)\,P_D(A) = \dfrac{1}{20} * \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{200} = 0,005$, $P(A\cap\overline{D}) = P(\overline{D})\,P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{19}{20} * \dfrac{4}{5} = \dfrac{19}{25} = 0,760$.

3. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(D,\overline{D})$, on obtient : $P(A) = P(A\cap D) + P(A\cap\overline{D}) = 0,765$.

4. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_A(D) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(A)} = \dfrac{0,005}{0,765} \simeq 0,006$.

II. Loi binomiale.

1. On répète 10 fois la même expérience (« prélever un appareil »), chaque expérience étant indépendante l'une de l'autre, X représente le nombre de succès (« appareil sans défaut ») et la probabilité du succès est $p = 1 - \dfrac{5}{100} = \dfrac{95}{100}$ donc X suit la loi binômiale $\mathcal{B}(10,p)$ d'où $X(\Omega) = [\![0,10]\!]$, $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \dbinom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$

2. Il s'agit de la probabilité $P(X=10)=p^{10}$.

3. Il s'agit de la probabilité $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-p^{10}$.

III. Etude d'une densité de probabilité.

1. f est évidemment continue sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{t\to0^-} f(t)=\lim\limits_{t\to0^-}0=0$, $\lim\limits_{t\to0^+} f(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\left(2e^{-t}-2e^{-2t}\right)=2e^0-2e^0=0$Ainsi $\lim\limits_{t\to0} f(t)=0$ et $f(0)=0$ d'où $\lim\limits_{t\to0} f(t)=f(0)$ c'est-à-dire que f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

2. Il est immédiat que $\forall t\leqslant 0,\quad f(t)=0\geqslant 0$. D'autre part, pour $t\geqslant 0$, on a $f(t)=2e^{-t}-2e^{-2t}=2\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)\geqslant 0\Leftrightarrow e^{-t}-e^{-2t}\geqslant 0\Leftrightarrow e^{-t}\geqslant e^{-2t}\Leftrightarrow -t\geqslant -2t\Leftrightarrow 2t-t\geqslant 0\Leftrightarrow t\geqslant 0$ donc $f(t)\geqslant 0$ pour $t\geqslant 0$.

3. $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left(2e^{-t}-2e^{-2t}\right)dt=\left[-2e^{-t}+e^{-2t}\right]_0^x=-2e^{-x}+e^{-2x}+2-1=1+e^{-2x}-2e^{-x}$

4. D'après le calcul précédent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=1+0-2*0=1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

5. La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f=\int_0^{+\infty} f$ converge et vaut 1 donc f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire T.

IV. Une variable à densité.

1. Puisque f est une densité de T, on a pour $x\in\mathbb{R}_+$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,dt=\int_{-\infty}^0\underbrace{f}_{=0}+\int_0^x f=1+e^{-2x}-2e^{-x}=1+\left(e^{-x}\right)^2-2e^{-x}=\left(1-e^{-x}\right)^2$$

2. Un calcul direct nous donne $F(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(1-e^{-x}\right)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-e^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. En effet, puisque x est positif, on a $e^{-x}\leqslant 1\Leftrightarrow 1-e^{-x}\geqslant 0$. Poursuivons le calcul :

$$1-e^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{-x}\Leftrightarrow -x=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow x=-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3. En suivant l'indication proposée, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(t)\,dt &= \int_0^x t\left(2e^{-t}-2e^{-2t}\right)dt=\left[t\left(-2e^{-t}+e^{-2t}\right)\right]_0^x-\int_0^x\left(-2e^{-t}+e^{-2t}\right)dt\\ &= x\left(-2e^{-x}+e^{-2x}\right)-\left[2e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x=x\left(-2e^{-x}+e^{-2x}\right)-\left(2e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

4. D'après le calcul précédent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x tf(t)\,dt=\frac{3}{2}$ (d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x}=0$) donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt=\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{3}{2}$. Par conséquent, T admet une espérance valant $\frac{3}{2}$.