BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Conception : E.S.C.P. / EUROPE

Code épreuve :
285

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Lundi 9 mai 2011, de 8 h. à 12 h.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Soit A, J, K et I les quatre matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ et } I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer K^2 et K^3.
   (b) Déterminer K^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
2. (a) Exprimer A en fonction de I et K.
   (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, A^n en fonction des matrices I, K, K^2 et de n.
   (c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression explicite de la matrice A^n en fonction de n.
   (d) Vérifier que le résultat trouvé est encore valable pour $n=0$ et $n=1$.
3. Montrer que A est inversible. On note A^{-1} la matrice inverse de A.
4. *Une première façon de calculer* A^{-1}.
   (a) Calculer J^2, et pour tout entier k supérieur ou égal à 3, calculer J^k.
   (b) Exprimer A en fonction des matrices I, J et J^2.
   (c) Calculer $(I+2J+3J^2)(I-2J+J^2)$.
   (d) En déduire la matrice A^{-1}.
5. *Une deuxième façon de calculer* A^{-1}.
   (a) Calculer les matrices A^2 et A^3.
   (b) Quelle est la matrice A^3-3A^2+3A ?
   (c) En déduire l'écriture de A^{-1} en fonction de I, A et A^2.
   (d) Vérifier que ce dernier résultat est cohérent avec celui établi à la question 4.d).

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = x - \ln(x)$$

Les dérivées première et seconde de f sont notées respectivement, f' et f''.

1. Déterminer pour tout réel x strictement positif, l'expression de $f'(x)$.
2. (a) Quelle est la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$?

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. (a) Donner le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) En déduire que pour tout réel x strictement positif, $f(x)$ est strictement positif.
4. (a) Déterminer pour tout réel x strictement positif, l'expression de $f''(x)$.

   (b) En déduire les variations de la fonction f'.

   (c) Établir pour tout réel x de $[1, 2]$, les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

   (d) À l'aide d'une inégalité des accroissements finis, établir pour tout x de $[1, 2]$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant f(x) - 1 \leqslant \frac{1}{2}(x - 1)$$

5. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1, 2]$.

   (b) En déduire pour tout entier naturel n, les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3

On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que X_n, T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur cet espace ($\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω, c'est-à-dire l'ensemble des événements).

On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix}, \; V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0$, $n = 1$ et $n \geqslant 2$).
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :
$$U_{n+1} = MU_n.$$
   Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
   (c) Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.
   (d) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante :
$$U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$
   (e) Donner la loi de la variable aléatoire X_n.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de X_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Reconnaître la loi de T_1.
4. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.
5. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.
   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
$$\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \text{ si } x \geqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. (a) Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale $I_A = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{x^3}dx$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} I_A$.
   (c) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère dans la suite, une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F_X sa fonction de répartition.

2. Déterminer pour tout réel x, $F_X(x)$.
3. (a) Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale $J_A = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{x^2}dx$. En déduire que X admet une espérance et donner sa valeur.
   (b) Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale $K_A = \displaystyle\int_1^A \frac{2}{x}dx$. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
4. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \ln(X)$ et on note F_Y sa fonction de répartition.
   (a) Établir pour tout réel x, l'égalité suivante : $F_Y(x) = F_X(e^x)$.
   (b) Donner, en distinguant les cas x positif et x négatif, l'expression de $F_Y(x)$.
   Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire Y.
   (c) Donner sans calcul, la valeur de l'espérance de Y.

On considère dans la suite, deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant la même loi que X.

5. On pose $Z = \sup(X_1, X_2)$, c'est-à-dire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a la relation :

$$\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x])$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z, notée F_Z.
   (b) En déduire une densité h de Z.

6. On pose $T = \inf(X_1, X_2)$, c'est-à-dire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a la relation :

$$\mathbb{P}([T > x]) = \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x])$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition F_T de T.
   (b) En déduire une densité g de T.
   (c) Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale $\displaystyle\int_1^A tg(t)dt$.
   (d) Déterminer $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_1^A tg(t)dt$.
   (e) Donner la valeur de l'espérance de la variable aléatoire T.