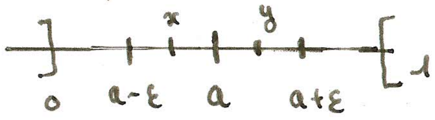
Partie 0 : 1) Soit $a \in]0,1[$, on va montrer $\exists (x,y) \in]0,1[^2$ tels que $\frac{x+y}{2} = a$ mais $(x \neq a)$ et $(y \neq a)$ ce qui montrera que a ne peut pas être extrémal.

$a \in]0,1[$ donc $\exists \varepsilon > 0$ $\begin{cases} a-\varepsilon > 0 \\ a+\varepsilon < 1 \end{cases}$



posons $x = \frac{a + a - \varepsilon}{2}$ $y = \frac{a + a + \varepsilon}{2}$

$x = a - \frac{\varepsilon}{2}$ donc $0 < a - \varepsilon < x < a < 1$ $x \in]0,1[$

$y = a + \frac{\varepsilon}{2}$ donc $0 < a < y < a + \varepsilon$ $y \in]0,1[$

et $\frac{x+y}{2} = a$ mais $x \neq y$ et $x \neq a$, $y \neq a$.

donc aucun point de $]0,1[$ ne peut être extrémal.

2) Si $a = 0$ alors soient $(x,y) \in [0,1]$, $\frac{x+y}{2} = 0$ nécessairement $x = y = 0$.

Si $a = 1$ alors soient $(x,y) \in [0,1]$, $x + y = 2$ nécessairement $x = y = 1$

Donc 0 et 1 sont extrémaux dans $[0,1]$. et comme il n'y a pas de point extrémal dans l'ouvert $]0,1[$, ce sont les seuls.

Partie I 3) a) soit $\Pi_\alpha \in A_2$ alors $\Pi_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha I_2 + (1-\alpha) J$

b) $\frac{1}{2}(\Pi_\alpha + \Pi_\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \\ 1 - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix} = \Pi_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ avec $\Pi_{\frac{\alpha+\beta}{2}} \in A_2$

c) soit $\Pi_\alpha \in A_2$, Π_α est inversible si son déterminant (ordre 2 donc au programme de terminale) est non nul, soit $\alpha^2 - (1-\alpha)^2 \neq 0$

Cherchons les $\alpha \in [0,1]$, $(\alpha - 1 + \alpha)(\alpha + 1 - \alpha) = 0$ soit $2\alpha - 1 = 0$ soit $\alpha = \frac{1}{2}$

Donc la seule matrice non inversible de A_2 est $\Pi_{1/2}$

Donc $\forall \alpha \in [0,1]$ avec $\alpha \neq \frac{1}{2}$ Π_α est inversible.

Π_α^{-1} est alors donnée par la formule classique : $\frac{1}{\det \Pi_\alpha} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$

Soit $\Pi_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha-1} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$

$\Pi_\alpha^{-1} \in A_2 \iff \frac{\alpha}{2\alpha-1} \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ avec $\alpha \in [0,1]$

- si $\alpha \in]0,\frac{1}{2}[$ $2\alpha - 1 < 0$ donc $\Pi_\alpha^{-1} \notin A_2$. car $\frac{\alpha}{2\alpha-1} < 0$
- si $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$ $\frac{\alpha}{2\alpha-1} > 1$ donc $\Pi_\alpha^{-1} \notin A_2$
- si $\alpha = 1$ $\Pi_\alpha = I_2 = \Pi_\alpha^{-1} \in A_2$
- si $\alpha = 0$ $\Pi_\alpha = J \in A_2$

(4) a) $I_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$ soient Π_α et Π_β, $\frac{\Pi_\alpha + \Pi_\beta}{2} = I_2$ (2)

alors $\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$ avec $(\alpha,\beta) \in [0,1]^2$

or 1 est extremal de $[0,1]$ (cf partie 0) donc $\alpha = \beta = 1$ et $\Pi_\alpha = \Pi_\beta = I_2$

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ soient Π_α et Π_β, $\frac{\Pi_\alpha + \Pi_\beta}{2} = J$

alors $\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ avec $(\alpha,\beta) \in [0,1]^2$ or 0 extremal sur $[0,1]$

donc $\alpha = \beta = 0$ et $\Pi_\alpha = \Pi_\beta = \Pi_0 = J$

(b) $\frac{1}{2}(\Pi_{2\alpha} + J) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\alpha & 1-2\alpha \\ 1-2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} = \Pi_\alpha$

$\Pi_{2\alpha} \in A_2$ car $2\alpha \leq 1$

. Si Π_α était extremal, $\forall (\beta,\gamma) \in [0,1]^2$, $\frac{\Pi_\beta + \Pi_\gamma}{2} = \Pi_\alpha \Rightarrow \Pi_\beta = \Pi_\gamma = \Pi_\alpha$

or $\Pi_\alpha = \frac{\Pi_{2\alpha} + J}{2}$ avec $\Pi_{2\alpha} \neq \Pi_\alpha$ car $\alpha \neq 0$

et $J \neq \Pi_\alpha$ car $\alpha < \frac{1}{2}$

donc on a trouvé un couple contredisant le principe d'extremalité.

(c) $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, on montre que $\Pi_\alpha = \frac{1}{2}(\Pi_{2\alpha-1} + I)$ $\Pi_{2\alpha-1} \in A_2$

et en faisant un raisonnement similaire à b), on montre la propriété.

(5) a) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on résoud le système $JX = \lambda X$ soit

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda^2 x \end{cases}$$

ce système n'est pas de Cramer lorsque $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$

$E_1 = \{(x,y) \,/\, -x + y = 0\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{-1} = \{(x,y) \,/\, -x - y = 0\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

J est diagonalisable car $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 2$

(b) Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrice de passage ds la base de vecteurs propres

comme J est diagonalisable et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés à 1 et -1 alors $J = PDP^{-1}$ et $P \in Gl_2(\mathbb{R})$

Or $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ $\Pi_\alpha = \alpha I + (1-\alpha) J$

$= \alpha PP^{-1} + (1-\alpha) PDP^{-1}$

$= P(\alpha I + (1-\alpha) D) P^{-1}$

Posons $D_\alpha = \alpha I + (1-\alpha) D$

D_α est diagonale car $D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + (1-\alpha) & 0 \\ 0 & \alpha - 1 + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix}$ (3)

donc $\Pi_\alpha = P D_\alpha P^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$

d'où $D_\alpha = P^{-1} \Pi_\alpha P$

(c) Π_α est diagonalisable et $D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres d'un projecteur sont 0 et 1 (les sep associés sont respectivement $\operatorname{Ker} u_\alpha$ et $\operatorname{Im} u_\alpha$)

Donc Π_α est un projecteur si $2\alpha - 1 = 0$ soit $\underline{\alpha = \frac{1}{2}}$

On a alors $\Pi_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im} u_\alpha = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Ker} u_\alpha = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>Partie II</u> (6) A non vide donc $\exists v \neq 0,\ v \in A$ $\|v - v\| = 0$

donc $\{\|v - w\| ;\ (v, w) \in A^2\}$ non vide puisque $0 \in \{\|v-w\| ;\ (v,w) \in A^2\}$.

$\forall (v, w) \in A^2$ $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\| \leq 2R^2$

donc $\{\|v-w\| ;\ (v,w) \in A^2\}$ est majorée par $2R^2$.

(7) (a) • $\|a - b\| = \left\|\left(\frac{c}{2} - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right)\right\|$

d'où $\|a - b\| \leq \frac{1}{2}\|c - b\| + \frac{1}{2}\|d - b\|$

• D'autre part, $\|b - a\| = \sup\{\|v - w\| ;\ (v, w) \in A^2\}$

donc $\|b - a\| \geq \|c - b\|$ car $(b, c) \in A^2$

$\|b - a\| \geq \|d - b\|$ car $(b, d) \in A^2$

d'où $\|b - a\| \geq \frac{1}{2}(\|c - b\| + \|d - b\|)$

d'où $\frac{1}{2}\|c - b\| + \frac{1}{2}\|d - b\| = \|a - b\|$

Mais $\|c - b\| \leq \|a - b\|$ et $\|d - b\| \leq \|a - b\|$ par définition du sup donc $\|c - b\| = \|d - b\| = \|a - b\| = \delta(A)$.

(b) $\|c - b\|^2 = \|(c - a) + (a - b)\|^2 = \|c - a\|^2 + \|a - b\|^2 + 2\langle c - a | a - b\rangle$
(définition du produit scalaire)

Mais $\|a-b\|^2 = \delta(A)$ donc $\|c-b\|^2 = \|c-a\|^2 + \delta(A)^2 + 2\langle c-a | a-b\rangle$

et $\|c-b\| = \delta(A)$ d'où $\delta(A)^2 = \|c-a\|^2 + \delta(A^2) + 2\langle c-a | a-b\rangle$

d'où $\|c-a\|^2 = -2\langle c-a, a-b\rangle$

ⓒ $\delta(A)^2 = \|d-b\|^2 = \|d-a+a-b\|^2 = \|d-a\|^2 + \delta(A)^2 + 2\langle d-a, a-b\rangle$

d'où $\|d-a\|^2 = -2\langle d-a, a-b\rangle$

ⓓ On a $\langle c-d, a-b\rangle = \langle c-a+a-d, a-b\rangle$

$= \langle c-a, a-b\rangle - \langle d-a, a-b\rangle$

$= -\frac{1}{2}\left(\|c-a\|^2 - \|d-a\|^2\right)$

or $c-a = c - \frac{c-d}{2} = \frac{c-d}{2}$

et $d-a = \frac{d-c}{2}$

d'où $\|c-a\| = \|d-a\|$ d'où $\langle c-d, a-b\rangle = 0$

donc $c-d$ et $a-b$ orthogonaux

ⓔ $\|c-a\|^2 = -2\langle c-a, a-b\rangle$ or $c-a = \frac{c-d}{2}$ donc $\|c-a\|^2 = -\langle c-d, a-b\rangle = 0$

donc $c-a=0$ donc $c=a$ donc $d=a$.

Partie III

⑧ ⓐ $M = [m_{ij}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ $M' = [m'_{ij}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ $M'' = \frac{1}{2}(M+M')$

. soient $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ $m_{ij}\geq 0$, $m'_{ij}\geq 0$ donc $\frac{1}{2}(m_{ij}+m'_{ij})\geq 0$

$i\in[\![1,n]\!]$. $\sum_{j=1}^{n} m''_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} + \sum_{j=1}^{n} m'_{ij}\right) = 1$

idem pour $j\in[\![1,n]\!]$ $\sum_{i=1}^{n} m''_{ij} = 1$

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ $({}^tM)_{(i,j)} = m_{j,i}\geq 0$

$i\in[\![1,n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n} ({}^tM)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} = 1$ car $M\in A_n$

$j\in[\![1,n]\!]$ $\sum_{i=1}^{n} ({}^tM)_{ij} = \sum_{i=1}^{n} m_{j,i} = 1$

$i\in[\![1,n]\!]$

ⓑ $(MX_0)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot(X_0)_j = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1 = (X_0)_i$

d'où $MX_0 = X_0$

c. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \quad m_{ij} \geq 0$

$i \in [\![1,n]\!]$. $(\Pi X_0)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = (X_0)_i = 1$ d'où $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

$i \in [\![1,n]\!]$ $({}^t\Pi X_0)_j = \sum_{j=1}^{n} m_{ji} = (X_0)_j = 1$ d'où $\sum_{j=1}^{n} m_{ji} = 1$ (i fixé)

d'où $\Pi \in A_n$.

d. soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\quad (\Pi\Pi')_{(i,j)} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} m'_{kj} \geq 0$

$i \in [\![1,n]\!]$. $\sum_{j=1}^{n} (\Pi\Pi')_{(i,j)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} m'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ik} m'_{kj}$ (pas de contrainte sur les indices)

$$= \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} m'_{kj}\right)}_{=1} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 1$$

idem en j

9 a $f_\sigma = Id$ et $\Pi_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

car $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\quad f_{Id}(e_j) = e_j$ donc $f = Id$.

b On recommence les calculs de sommes....

. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\quad (\Pi_\sigma)_{(i,j)} = 0$ ou 1 donc $(\Pi_\sigma)_{(i,j)} \geq 0$

. σ étant une bijection, si $j \neq j'$ $\sigma(j) \neq \sigma(j')$ donc $e_{\sigma(j)} \neq e_{\sigma(j')}$ donc sur chaque ligne de Π_σ, il y a un seul 1. Donc les sommes en lignes sont égales à 1.

. Soit $j \in [\![1,n]\!]$ $\quad \sum_{i=1}^{n} (\Pi_\sigma)_{i,j} = 1$ (terme correspondant à $(\sigma^{-1}(j), j)$)

. Dans la j^e colonne de Π_σ le seul terme non nul a pour indice $(\sigma(j), j)$

Donc sur la j^e ligne de ${}^t\Pi_\sigma$ le seul terme non nul a pour indice $(j, \sigma(j))$

On cherche donc τ tel que $\forall j \in [\![1,n]\!], \forall i \in [\![1,n]\!]$

$(\Pi_\tau)_{(i,j)} = ({}^t\Pi_\sigma)_{(i,j)}$ nécessairement $\tau = \sigma^{-1}$

Là, c'est un peu des maths "avec les mains..." (sic)

Avec un peu de rigueur, on peut faire mieux, voir ci-après.

$$(\Pi_\sigma)_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis refaire toute la démo ☺

$$({}^t\Pi_\sigma)_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(\Pi_\tau)_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \tau(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si on veut ${}^t\Pi_\sigma = \Pi_\tau$ alors nécessairement $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ $j = \sigma \circ \tau(j)$ d'où $\sigma^{-1} = \tau$

ⓒ $j \in [\![1,n]\!]$ $f_\sigma \circ f_{\sigma'}(e_j) = f_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = f(e_{\sigma(\sigma'(j))}) = f(e_{\sigma\circ\sigma'(j)})$

d'où coïncidence de $f_\sigma \circ f_{\sigma'}$ et $f_{\sigma\circ\sigma'}$ sur une base donc $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$

ⓓ . Chaque colonne de Π_σ a pour norme 1 puisque $(\Pi_\sigma)_{(i,j)} = 0$ sauf si $i = \sigma(j)$

. Soit $i \neq j$ on considère C_i et C_j vecteurs correspondant aux $i$ème et $j$ème colonne de Π_σ

$$\langle c_i, c_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} (\Pi_\sigma)_{k,i} (\Pi_\sigma)_{k,j}$$

$$= \Pi_{\sigma(i)\,i} \cdot 0 + \Pi_{\sigma(j),j} \cdot 0 = 0$$

les colonnes sont donc 2 à 2 orthogonales.

ⓔ bref, en voulant aller trop vite ...

⑩ $\sigma \in S_n$ Soient $A, B \in A_n$ tels que $\frac{1}{2}(A+B) = \Pi_\sigma$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $[A]_{(i,j)}$ et $[B]_{(i,j)}$ sont positifs.

. or si $i \neq \sigma(j)$ $(\Pi_\sigma)_{(i,j)} = 0$ donc $A_{i,j} = B_{i,j} = 0$.

. si $i = \sigma(j)$ $(\Pi_\sigma)_{(i,j)} = 1$

Mais comme A et B sont bistochastiques alors

$$\begin{cases} 0 \leq A_{i,j} \leq 1 \\ 0 \leq B_{i,j} \leq 1 \end{cases}$$ et on a donc $\frac{A_{i,j} + B_{i,j}}{2} = 1$

d'où (en utilisant les résultats de 0) $A_{i,j} = B_{i,j} = 1$

d'où $$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = (\Pi_\sigma)_{(i,j)}$$

idem pour B d'où $A = B = \Pi_\sigma$

11) a) $\tau \in S_n$. φ_τ est injective. si $\varphi_\tau(\sigma) = \varphi_\tau(\sigma')$

alors $\tau\circ\sigma = \tau\circ\sigma'$ soit en composant par τ^{-1}

$\tau^{-1}\circ\tau\circ\sigma = \tau^{-1}\circ\tau\circ\sigma'$ d'où $\sigma = \sigma'$

. φ_τ est surjective, soit $\sigma \in S_n$ alors $\sigma = \varphi_\tau(\tau^{-1}\circ\sigma)$

car $\tau(\tau^{-1}\circ\sigma) = \sigma$ et $\tau^{-1}\circ\sigma \in S_n$

. d'où φ_τ bijective.

$$f_\tau\circ p = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\tau\circ f_\sigma = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_{\tau\circ\sigma} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_{\varphi_\tau(\sigma)}$$

Mais comme φ_τ bijective, lorsque σ balaie S_n, $\varphi_\tau(\sigma)$ balaie S_n

d'où $f_\tau\circ p = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma'\in S_n} f_{\sigma'} = p$

b) $$p\circ p = \left(\frac{1}{n!}\right)^2\left(\sum_\sigma f_\sigma\right)\circ\left(\sum_\tau f_\tau\right) = \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\sigma\in S_n}\left(f_\sigma\circ\sum_{\tau\in S_n} f_\tau\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} p = \frac{\mathrm{card}(S_n)}{n!}\cdot p = \frac{n!}{n!}p = p$$

$p\circ p = p$ donc p est un projecteur

c) p est un projecteur donc $\mathrm{Im}\,p = \{x\in\mathbb{R}^n \,/\, p(x) = x\}$

. $x\in \mathrm{Im}\,p \Leftrightarrow \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma(x) = x$.

On a donc l'inclusion $\{x\in\mathbb{R}^n \,/\, \forall\sigma\in S_n,\ f_\sigma(x) = x\} \subset \mathrm{Im}\,p$.

. Soit $x\in\mathrm{Im}\,p$, soit $\sigma\in S_n$ alors $p(x) = x$ donc $f_\sigma\circ p(x) = f_\sigma(x)$

Mais $f_\sigma\circ p = p$ d'où $f_\sigma\circ p(x) = p(x) = x$

$= f_\sigma(x)$

d'où $f_\sigma(x) = x$ donc $\mathrm{Im}\,p \subset \{x\in\mathbb{R}^n/\ \forall\sigma\in S_n, f_\sigma(x) = x\}$

d'où $\mathrm{Im}\,p = \{x\in\mathbb{R}^n \,/\, \forall\sigma\in S_n,\ f_\sigma(x) = x\}$

d) . $\mathrm{Vect}(x_0) \subset \mathrm{Im}\,p$ car $\forall\sigma\in S_n$ $f_\sigma\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \sum_{i=1}^n f_\sigma(e_i)$

$$= \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n e_i = x_0.$$

. Si $x\in\mathrm{Im}\,p$, $\forall\sigma\in S_n$ $f_\sigma(x) = x$

Mais $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ avec $(x_1, \dots, x_n)\in\mathbb{R}^n$

ses coordonnées dans $(e_1, \dots, e_n)$

On a donc $\forall \sigma \in S_n \quad f_\sigma(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

soit $x_1 e_{\sigma(1)} + \dots + x_n e_{\sigma(n)} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

. Soit σ_1 la permutation $(1,2,3,\dots,n) \mapsto (2,1,3,4 \dots n)$

alors nécessairement $x_1 = x_2$ par unicité des coordonnées

. De même si $j > 1$, on considère $\sigma_j \quad (1, 2, \dots, \underset{j}{\uparrow}, \dots n) \mapsto (j, \dots 1, \dots n)$

alors $x_j = x_1$

D'où $\forall j \in [\![2, n]\!] \quad x_j = x_1$ et $x = x_1 (e_1 + \dots + e_n) \in \mathrm{Vect}(x_0)$

d'où $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Vect}(x_0)$

d'où $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}(x_0)$

e) $${}^t p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} {}^t \Pi_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \Pi_{\sigma^{-1}}$$

Mais quand σ balaie S_n, σ^{-1} balaie aussi S_n

d'où $${}^t p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in S_n} \Pi_{\sigma'} = p$$

Donc $\underline{{}^t p = p}$ $\quad$ P est symétrique, donc p est un projeté orthogonal.

f) . $$(P)_{ij} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (\Pi_\sigma)_{(i,j)} \geq 0$$

. soit $i \in [\![1, n]\!]$ $$\sum_{j=1}^n P_{i,j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n / \sigma(j) = i} 1$$

or le nombre de permutations pour un j donné telles que $\sigma(j) = i$ est $(n-1)!$. En effet cet ensemble est isomorphe à S_{n-1} (on fixe $\sigma(j) = i$ et on complète par une permutation des $n-1$ autres indices)

d'où $$\sum_{j=1}^n P_{i,j} = \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n(n-1)!}{n!} = 1$$

. je vous laisse faire la m̂ chose en ligne...

a) $$\mathrm{Tr}({}^t M N) = \sum_{i=1}^n ({}^t M N)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ({}^t M)_{i,j} (N)_{j,i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ji}\, n_{ji}$$

(b) . Symétrie : $Tr({}^tMN) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} M_{ji} N_{ji} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} N_{ji} M_{ji} = Tr({}^tNM)$

. Linéarité : par linéarité de transposée et de trace

. Positivité : $Tr({}^tMM) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{ji}^2 \geq 0$

. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $Tr({}^tMM) = 0 \Rightarrow \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{ji}^2 = 0$

$\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad m_{ji} = 0$

$\Rightarrow M = 0$

(c) $\| M_\sigma \|_2^2 = Tr({}^tM_\sigma M) = Tr(M_{\sigma^{-1}} M_\sigma)$

or $M_{\sigma^{-1}} M_\sigma = M_{\sigma^{-1}\circ\sigma} = M_I = I_d$

d'où $\| M_\sigma \|_2^2 = n$ donc $\| M_\sigma \| = \sqrt{n}$

(d) $M_\alpha - M_\beta = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & \alpha-\beta \end{pmatrix} = (\alpha-\beta)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\| M_\alpha - M_\beta \|_2 = \sqrt{Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)(\alpha-\beta)^2} = \sqrt{4(\alpha-\beta)^2} = 2|\alpha-\beta|$

. $\| M_0 - M_1 \|_2 = 2$

et $\forall (\alpha,\beta) \in [0,1]^2 \quad \| M_\alpha - M_\beta \|_2 = 2|\alpha-\beta| \leq 2$

d'où $\text{Sup} \| M_\alpha - M_\beta \|_2 = 2$ (c'est un max, il est atteint)

(e) $\| M \|_2^2 = \sqrt{Tr({}^tMM)} = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{ji}^2}$

Mais $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad 0 \leq m_{ij} \leq 1$

d'où $\| M \|_2^2 \leq \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} 1}$

d'où $\| M \|_2^2 \leq n$

(f) Soient $(M, N) \in A_n^2$ $\quad \| M - N \|^2 = \| M \|^2 + \| N \|^2 - 2\,Tr({}^tMN)$

Mais ${}^tM$ et N appartiennent à A_n donc leurs coefficients sont tous positifs donc ${}^tMN$ est à coefficients tous positifs

donc $Tr({}^tMN) \geq 0$

d'où $\quad \|\Pi - N\|_2^2 \leq \|\Pi\|^2 + \|N\|_2^2 \leq 2n$

d'où $\quad \|\Pi - N\|_2 \leq \sqrt{2n}$

(g) $\sigma \in S_n$. $\quad (\Pi_\sigma | \Pi_\tau) = T_r({}^t\Pi_\sigma . \Pi_\tau) = T_r(\Pi_{\sigma^{-1}} . \Pi_\tau) = T_r(\Pi_{\sigma^{-1} \circ \tau})$

or tous les coefficients de $\Pi_{\sigma^{-1}\circ\tau}$ sont positifs. Pour que la trace soit nulle, il faut que $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad (\Pi_{\sigma^{-1}\circ\tau})_{(i,i)} = 0$.

prenons τ tq $\begin{cases} \sigma^{-1} \circ \tau(1) = 2 \\ \sigma^{-1} \circ \tau(2) = 3 \\ \vdots \\ \sigma^{-1} \circ \tau(j) = j+1 \\ \vdots \\ \sigma^{-1} \circ \tau(n) = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \tau(1) = \sigma(2) \\ \tau(2) = \sigma(3) \\ \vdots \\ \tau(j) = \sigma(j+1) \\ \vdots \\ \tau(n) = 1 \end{cases}$

alors $\Pi_{\sigma^{-1}\circ\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T_r(\Pi_{\sigma^{-1}\circ\tau}) = 0$

(h) $\delta(A_n) = \operatorname{Sup}\{\|\Pi - N\|_2 / (\Pi, N) \in A_n^2\}$

On sait que $\delta(A_n) \leq \sqrt{2n}$

Soit σ une permutation et τ construite comme en (g).

alors $\quad \|\Pi_\sigma - \Pi_\tau\|^2 = \|\Pi_\sigma\|^2 + \|\Pi_\tau\|^2 + 0$

$= n + n \qquad$ (cf question (c))

d'où $\quad \|\Pi_\sigma - \Pi_\tau\| = \sqrt{2n}$

d'où $\quad \delta(A_n) = \sqrt{2n}$

On peut alors appliquer les résultats du II

13 (a) Soient $(A, B) \in F_n^2 \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad C = \lambda A + \mu B$

. Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$

i fixé : $\sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \mu \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0$

j fixé : $\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 0$

d'où $\lambda A + \mu B \in F_n \quad$ donc F_n est un sev.

ⓑ ϕ est trivialement linéaire.

· Mq ϕ injective. Soit $(A, B) \in F_n^2$ telles que $\phi(A) = \phi(B)$

Alors $\forall (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2 \quad a_{ij} = b_{ij}$

Mais soit $i \in [\![1, n-1]\!]^2$ on a alors $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ d'où $\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} = -a_{in}$

mais de même $\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} = -b_{in}$ et $\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}$ d'où $a_{in} = b_{in}$.

On montre de même que $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $a_{nj} = b_{nj}$

d'où $A = B$

ϕ est injective

· ϕ est surjective. Soit $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ alors

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{M} & \begin{matrix} -\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} \\ \vdots \\ -\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j} \end{matrix} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i1} \dots -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i\,n-1} & c \end{pmatrix}$$

vérifie $A \in F_n$ et $\phi(A) = M$

avec $c = \sum_{(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2} a_{ij}$

donc ϕ surjective

· donc ϕ bijective donc F_n isomorphe à $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

d'où $\dim F_n = (n-1)^2$

⑭ ⓐ (P_2) : les matrices de permutation $(2,2)$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

càd I et J. qui sont bien les seuls éléments extrémaux

ⓑ $H \cap F_n \neq \{0\}$. Soit $M \in H$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$

tel que $M = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k E_{i_k j_k}$ on cherche les λ_i tels que $M \in F_n$

$M \in F_n \Rightarrow \begin{cases} \text{la somme des termes de chaque colonne est nulle} \\ \text{la somme des termes de chaque ligne est nulle.} \end{cases}$

Donc on obtient un système de $2n$ équations à $2n$ inconnues.

Le rang de ce système est inférieur à $2n-1$, il n'est pas de Cramer donc $(0, \dots, 0)$ n'est pas la seule solution

En effet la somme des sommes des lignes est égale à la somme des somme des colonnes donc il existe une combinaison linéaire non nulle des $2n$ équations. Donc le rang du système est bien inférieur à $2n-1$

c) $Q_t = \Pi + tN$ $\qquad \Pi \in A_n$

$(Q_t)_{ij} = \Pi_{i,j} + t N_{i,j}$

on veut que $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2 \quad \Pi_{i,j} + tN_{i,j} \geq 0$

(la somme des lignes égale à 1 et idem pour les colonnes est évidemment vérifiée puisque $N \in F_n$ donc $\sum N_{ij} = 0$ en i ou en j)

on sait que $\Pi_{i,j} \geq 0$

N a des termes positifs et négatifs puisque les sommes en ligne et en colonne sont nulles.

$\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, on veut donc que $\Pi_{i_k, j_k} + tN_{i_k, j_k} \geq 0$

seuls termes potentiellement non nuls de N

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \left| \frac{\Pi_{i_k, j_k}}{N_{i_k, j_k}} \right|$ pour les i_k, j_k tels que $N_{i_k j_k} \neq 0$

alors $\forall t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\quad \Pi_{i_k, j_k} + tN_{i_k, j_k} \geq 0$

et donc $Q_t \in A_n$

d) $Q_t \in A_n$ et $Q_{-t} \in A_n$

Mais alors $\frac{1}{2}(Q_t + Q_{-t}) \in A_n$

or $\frac{1}{2}(Q_t + Q_{-t}) = \Pi$ et $Q_t \neq \Pi$
$\qquad Q_{-t} \neq \Pi$

donc Π n'est pas extremal. $\Rightarrow$ au plus $2n-1$ coeffs non nuls

e) Si toutes les colonnes ont 2 termes non nuls on aboutit à au moins 2n termes non nuls : contradiction.

Donc une colonne a au plus un terme non nul. Mais nécessairement elle ne peut être nulle car la somme de ses termes vaut 1

f) $\sum_{j=1}^{n} m_{r,j} = 1$ mais $m_{r,s} = 1$ et $\forall j \in [\![1,n]\!] \quad m_{r,j} \geq 0$

d'où $\forall j \in [\![1,n]\!] \quad m_{r,j} = 0$ si $j \neq s$

g) . $\forall (i,j) \in [\![1, n-1]\!]$ $\quad \Pi'_{i,j} \geq 0$

soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \Pi'_{i,j} = 1$ car c'est la somme de la ligne "correspondante" de Π où on a ôté le terme de la colonne s. Or la ligne correspondante n'est pas la r-ième de Π donc ce terme ôté est nul et comme Π est bistochastique, la somme vaut 1.

idem en colonne

Rem : on peut faire mieux ! mais ... je fatigue :)

Si $i \neq r$

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} m_{ij}}_{\text{colonne de } \Pi'} + \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ car } i \neq r}}{m_{is}}$$

Bref, je vous laisse reformuler.

h) Récurrence $\quad P(n-1)$ vraie $\Rightarrow A_{n-1}$ matrice de permutation
On construit A_n en rajoutant une ligne et une colonne avec un 1 en position (r, s) donc aucun autre sur la ligne et la colonne.
(On pose alors $f_\sigma(e_r) = e_s$)

Là encore on peut mieux rédiger ... mais vous avez compris l'idée

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ r \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\qquad\qquad\qquad \uparrow s$$

* noir = A_{n-1}
* rouge = A_n