Remarque : une épreuve qui a accordé une très large part à Scilab et clairement favorisé les élèves des prépas qui donnent de nombreuses heures de cours d'info dispensées parfois par des profs spécifiques. Mais bon, Scilab est au programme !

Exercice 1 1) a) y = sum (x.^[1 : n])

b) si $x \neq 1$, on reconnait l'expression d'une suite géométrique de raison x et dont le premier terme est x et non x^0 puisque le premier indice de la somme est 1

si $x \neq 1$ $\quad f_n(x) = x \cdot \dfrac{1-x^n}{1-x}$

d'où le scilab : if x == 1 then y = n
else y = x * (1 - x^n) / (1-x)

2) la fonction $x \mapsto f_n(x)$ est C^∞ sur $[0,1]$ car polynomiale.

$\forall x \in [0,1] \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1}$

donc $\forall x \in]0,1] \quad f_n'(x) > 0$
$f'(0) = 1$
$\Big\}\ \forall x \in [0,1] \quad f_n'(x) > 0$

f_n est donc strictement croissante sur le fermé $[0,1]$, elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$ donc de $[0,1]$ dans $[0,n]$
Or $1 \in [0,n]$ donc il existe un unique α_n de $[0,1]$ dont l'image par f_n est 1.

3) a) $f_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n^k + \alpha_n^{n+1} = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1}$

Or $\alpha_n \in [0,1]$ donc $1 + \alpha_n^{n+1} \geq 1$ d'où $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$

b) $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$ par hypothèse, $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ par le résultat précédent.
Or f_{n+1} est une bijection croissante de $[0,1]$ dans $[0,n+1]$ donc nécessairement $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ (sinon, on aboutirait à une contradiction)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n \in [0,n]$ donc $\alpha_n \geq 0$.

$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée donc convergente.

4) a) α_2 vérifie : $\begin{cases} \alpha + \alpha^2 = 1 \\ \text{et } \alpha \in [0,1] \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \\ \alpha \in [0,1] \end{cases}$ trinôme du second degré.

donc $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ car l'autre solution de l'équation du second degré est négative.

et $0 \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ car $2 \leq \sqrt{5} < 3$ d'où $0 \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$

b) $\forall n \geqslant 2$, compte tenu de la décroissance de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_2$ donc $0 \leq \alpha_n^{n+1} \leq \alpha_2^{n+1}$

Mais $0 \leq \alpha_2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_2^{n+1} = 0$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$

c) $f_n(\alpha_n) = \alpha_n \dfrac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc $\alpha_n(1-\alpha_n^n) = 1-\alpha_n$

soit $2\alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1$

On peut passer à la limite dans cette expression puisqu'on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ existe et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$

Nous obtenons donc $2.\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$

5) Le résultat affiché est une valeur approchée de x_n

Exercice 2

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_{\Pi_n}(x) = P(\Pi_n \leq x) = P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \leq x)\right)$

or les $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont indépendantes

d'où $F_{\Pi_n}(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} P(X_i \leq x)$

Et comme les (X_i) ont même loi

$$F_{\Pi_n}(x) = P(X_1 \leq x)^n = \left(F_{X_1}(x)\right)^n$$

Avec $F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

d'où $F_{\Pi_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

b) . F_{Π_n} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé au plus de $\{0,1\}$

. F_{Π_n} est continue sur $\mathbb{R}$ ($\lim\limits_{x\to 0} F_{\Pi_n}(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} F_{\Pi_n}(x) = 1$)

et F_{Π_n} polynomiale sur $[0,1]$

. F_{Π_n} est croissante sur $\mathbb{R}$

. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\Pi_n} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\Pi_n} = 1$

Donc F_{Π_n} est la fonction de répartition d'une variable à densité dont la densité f_{Π_n} est donnée par : $f_{\Pi_n}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ nx^{n-1} \text{ si } t \in [0,1] \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{cases}$ ③

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{\Pi_n}(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}\, n t^{n-1}$

c) Sous réserve de convergence $E(\Pi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_{\Pi_n}(t)\, dt$

Mais cette intégrale est bien définie puisque f_{Π_n} est nulle en dehors du compact $[0,1]$

d'où $E(\Pi_n) = \int_0^1 n t^n\, dt = \frac{n}{n+1}\left[t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$

de même $E(\Pi_n^2) = \int_0^1 n t^2 t^{n-1}\, dt = n\int_0^1 t^{n+1}\, dt = \frac{n}{n+2}$

d) $(\Pi_n - 1)^2$ est une va positive, on peut donc lui appliquer l'inégalité de Markov.

$$P\left((\Pi_n-1)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left((\Pi_n-1)^2\right)}{\varepsilon^2}$$

par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(\Pi_n-1)^2 = E(\Pi_n^2) - 2\mathbb{E}(\Pi_n) + 1$

$$= \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 = \frac{n^2+n-2n^2-4n+n^2+3n+2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

d'où $P\left((\Pi_n-1)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)}$

d'où $0 \leq P\left(|\Pi_n - 1| \geq \varepsilon\right) = P\left((\Pi_n-1)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)}$

e) par encadrement, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)} = 0$

on a $\lim_{n\to+\infty} P\left(|\Pi_n - 1| \geq \varepsilon\right) = 0$

Donc $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 1

2) ⓐ $Y = n(1 - \max(X))$

ⓑ Convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une loi exponentielle de paramètre 1

3°) ⓐ $Y_n(\Omega) = [0, n]$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leq 0$ $\mathbb{P}(Y_m \leq x) = 0$ $F_{Y_m}(x) = 0$

. Si $x \geq m$ $\mathbb{P}(Y_m \leq x) = 1$ $F_{Y_m}(x) = 1$

. Si $x \in [0, m]$

$$\mathbb{P}(Y_m \leq x) = \mathbb{P}\left(m(1-\Pi_m) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(1-\Pi_m \leq \frac{x}{m}\right) = \mathbb{P}\left(\Pi_m \geq 1 - \frac{x}{m}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\Pi_m < 1 - \frac{x}{m}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\Pi_m \leq 1 - \frac{x}{m}\right)$$

$$= 1 - F_{\Pi_m}\left(1 - \frac{x}{m}\right)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m$$

d'où pour $x \in [0, m]$ $F_{Y_m}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m$

b). Si $x \leq 0$ $\lim\limits_{m \to +\infty} F_{Y_m}(x) = 0$

. Si $x \geq 0$ $\lim\limits_{m \to +\infty} F_{Y_m}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m$ car apcr $x \leq m$.

on $\lim\limits_{m \to +\infty}\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$

d'où $\lim\limits_{m \to +\infty} F_{Y_m}(x) = 1 - e^{-x}$

c) $x \overset{F}{\longmapsto} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ est la fonction de répartition d'une exponentielle de paramètre 1.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{m \to +\infty} F_{Y_m}(x) = F(x)$

$(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge donc en loi vers une exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3

1) ⓐ $A = \begin{pmatrix} -n & & (1) \\ & -n & \\ (1) & & \ddots \\ & & & -n \end{pmatrix} = J - (n+1) I$ J et I commutent

$$A^2 = J^2 - 2(n+1) J + (n+1)^2 I$$

or $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & 1 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ & & \\ n & & n \end{pmatrix} = n J$

$$A^2 = nJ - 2nJ - 2J + (n+1)^2 I = (n+1)^2 I - (n+2) J$$

ⓑ $A^2 + (n+2) A = -(n+1) I$

le polynôme $P_n(X) = X^2 + (n+2)X + (n+1)$ est donc annulateur. (5)

$Sp(A) \subset \{$racines de $P_n\}$

On cherche les racines de P_n:

$$\Delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2$$

$$x_1 = \frac{-n-2-n}{2} \qquad x_2 = \frac{-n-2+n}{2}$$

les valeurs propres possibles de A sont -1 et $-(n+1)$

(c) 0 n'est pas valeur propre donc A est inversible

(2) $$\|u\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{n+1}} (\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_n) \right\|$$

Mais les $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ forment une base orthogonale, Pythagore s'applique

$$\|u\|^2 = \frac{1}{n+1} \left(\|\varepsilon_0\|^2 + \dots + \|\varepsilon_n\|^2 \right) = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

les ε_i sont unitaires.

d'où $\|u\| = 1$

(3) (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$ $\quad \|e_i\|^2 = \frac{n+1}{n} \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right)$

$$\|e_i\|^2 = \frac{n+1}{n} \left(1 + \langle \varepsilon_i, u\rangle^2 - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle^2 \right)$$

or $\langle \varepsilon_i, u \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i$ $\qquad$ car $\forall j \neq i \ \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$

d'où $$\|e_i\|^2 = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$$

(b) si $i \neq j$ $\quad \langle e_i, e_j \rangle = \frac{n+1}{n} \langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, \varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u \rangle u \rangle$

$$= \frac{n+1}{n} \left(0 - 2\langle \varepsilon_j, u\rangle . \langle \varepsilon_i, u\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle \langle \varepsilon_j, u\rangle \langle u, u\rangle \right)$$

$$\langle \varepsilon_j, u \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad \langle \varepsilon_i, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

d'où $$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{n+1}{n} \left(-\frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n}$$

c) Soit $i \in [\![0, n]\!]$ $\quad <e_i, u> = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(<\varepsilon_i, u> - <\varepsilon_i, u><u, u> \right)$

$= 0$ car $\|u\|^2 = 1$

d'où $\forall i \in [\![0, n]\!]$ $\quad <e_i, u> = 0$ donc $e_i \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$

d) $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ est de dimension n car $\mathrm{Vect}\, u$ est de dimension 1

Montrons que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre, comme elle est composée de n vecteurs, cela suffira pour montrer que c'est une base de $(\mathrm{Vect}\, u)^\perp$

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, on a donc $\lambda_1 <e_1, e_i> + \dots + \lambda_n <e_n, e_i> = 0$ (on fait le produit scalaire avec e_i)

soit : $-\frac{\lambda_1}{n} + \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{n} + \lambda_i - \frac{\lambda_{i+1}}{n} \dots - \frac{\lambda_n}{n} = 0$

soit $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $+\lambda_1 \dots + \lambda_{i-1} - n\lambda_i + \lambda_{i+1} \dots + \lambda_n = 0$

soit $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$ or A est inversible

donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, elle a n éléments, $\dim(\mathrm{Vect}\, u)^\perp = n$ donc c'est une base de $(\mathrm{Vect}\, u)^\perp$

4) a) On montre d'abord que f est symétrique pour ne montrer que la linéarité d'un seul côté.

. Soient $(x, y) \in F \times F$ $\quad f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} <x, e_k><y, e_k> - \frac{n+1}{n} <x, y>$

$= \sum_{k=0}^{n} <y, e_k><x, e_k> - \frac{n+1}{n} <y, x>$

le produit scalaire est symétrique

$= f(y, x)$

. La linéarité à gauche est triviale par linéarité du produit scalaire

je vous laisse faire...

b) $f<e_i, e_j> = \sum_{k=0}^{n} <e_i, e_k><e_j, e_k> - \frac{n+1}{n} <e_i, e_j>$

- si $i=j$ $\quad \langle e_i, e_i\rangle = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle \langle e_i, e_k\rangle = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \langle e_i, e_k\rangle^2 + 1$$

$$= 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$$f(e_i, e_i) = \frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n} \langle e_i, e_i\rangle = 0$$

- si $i \neq j$ $\quad \langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}$

$$f(e_i, e_j) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle \langle e_j, e_k\rangle = \frac{n+1}{n^2}$$ car k ne peut être égal à i et j simultanément.

$$\langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}$$

d'où $$f(e_i, e_j) = \frac{n+1}{n^2} - \frac{n+1}{n^2} = 0$$

- donc $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ $\quad f(e_i, e_j) = 0$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de F, donc $\exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\exists! (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n / \; y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

f est bilinéaire symétrique donc

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k y_j f(e_k, e_l) = 0 \quad \text{car } f(e_k, e_l) = 0$$

d'où $$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle \langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, y\rangle$$

si $x \in F$

d) $$\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2$$

<u>Problème:</u> ① $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad P^{(k)}$ est un polynôme de degré inférieur à celui de P donc φ est bien à valeur dans $\mathbb{R}_n[X]$ comme somme de polynômes de degrés inférieurs à celui de P

φ est trivialement linéaire car l'opérateur dérivé k-ième l'est ainsi que la somme d'opérateurs linéaires.

$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} 1^{(k)} = 1$ donc $\varphi(1) = 1$

et 1 est valeur propre car on a trouvé un vecteur non nul, en l'occurrence e_0 tel que $\varphi(e_0) = 1 . e_0$.

(b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$ Soit $k \in [\![0, n]\!]$

$e_j = X^j$ $e_j^{(1)} = j X^{j-1}$ $e_j^{(2)} = j(j-1)X^{j-2}$

$e_j^{(j)} = j(j-1) \cdots (j-(j-1))$

et si $k \geq j+1$ $e_j^{(k)} = 0$

d'où $\varphi(e_j) - e_j = jX^{j-1} +$ (termes de degrés strictement inférieurs à $j-1$)

Or $j \geq 1$ donc $j-1 \geq 0$

donc $\deg(\varphi(e_j) - e_j) = j-1$

(c). On a donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\deg \varphi(e_j) \leq j$ $\varphi(e_0) = e_0$

donc $\varphi(e_j)$ se décompose suivant $(e_0, \dots, e_j)$ (vrai aussi pour e_0) donc la matrice de φ dans la base $(e_0, \dots, e_n)$ est T'Sup

D'autre part, le coefficient de $\varphi(e_j)$ en e_j est 1 car $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$

donc la matrice n'a que des 1 sur la diagonale.

Donc 1 est la seule valeur propre.

(d) 0 n'est pas valeur propre de φ donc φ est un automorphisme car $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ donc φ injectif en dim finie donc bijectif.

3) (a) $\varphi(P - P') = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)}$

$= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=1}^{n+1} P^{(k)} = P - P^{(n+1)} = P$

car $P^{(n+1)} = 0$

(b) On remarque que si on pose $\psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P - P'$

(ψ est trivialement un endomorphisme)

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\varphi \circ \psi(P) = P$ donc $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$

De même $\psi\circ\varphi(P) = \left(\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\right)'$

$$= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=1}^{n+1} P^{(k)} = P$$

donc $\psi = \varphi^{-1}$

<u>Partie II</u> 4 ⓐ soit $k \in \mathbb{N}$

soit $x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et l'intégrale est impropre en $+\infty$.

Mais $\lim_{t\to+\infty} t^2 t^k e^{-t} = 0$ d'où $t^k e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente (Riemann) donc par théorème de comparaison $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ converge.

ⓑ si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ / $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$.

Or chacune des intégrales $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ converge pour $k \in [\![0, n]\!]$

donc par sommation d'intégrales convergentes $\int_x^{+\infty} P(t) e^{-t}\,dt$ converge.

5 ⓐ $\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_x^{A} e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} [e^{-x} - e^{-A}] = e^{-x}$

ⓑ Démonstrat° par récurrence.

$P(k)$: " $\int_x^{+\infty} e^{-t} t^k\,dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$ "

. $P(0)$ est vraie $\int_x^{+\infty} t^0 e^{-t}\,dt = 0!\ \frac{x^0}{0!} e^{-x}$.

. Supposons $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ soit vraie.

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_x^{A} t^{k+1} e^{-t}\,dt$$

on procède à l'IPP C^1 suivante sur $[x, A]$

$u(t) = t^{k+1}$ $u'(t) = (k+1)t^k\,dt$

$v'(t)dt = e^{-t}$ $v(t) = -e^{-t}$

alors $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_x^A e^{-t} t^{k+1} dt = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[-t^{k+1} e^{-t} \right]_x^A + \lim\limits_{A \to +\infty} (k+1) \int_x^A t^k e^{-t} dt$

$$= x^{k+1} e^{-x} + (k+1) \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

$$= x^{k+1} e^{-x} + (k+1)\, k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$$

mais $\frac{(k+1)!}{(k+1)!} = 1$

d'où $\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} dt = (k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$

la propriété est héréditaire.

On conclut par le principe de récurrence.

6) a) v = sum (x.^ [1:k] ./ cumprod[1:k])

s = p * (1 + v) * exp (-x)

terme d'ordre 0

b) Posons le changement de variable affine donc C^1 et bijectif $t = u + x$.

alors $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-(u+x)} du = e^{-x} \int_0^{\infty} (u+x)^k e^{-u} du$.

le cdv est bijectif, on intègre directement en $+\infty$

s = exp (-x) * mean ((z + x).^ k)

7 a) soit $k \in [\![0, n]\!]$, soit $x \in \mathbb{R}$

$$e^x \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \sum_{j=0}^{n} j!\, a_j \sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{i!}$$

donc $F(x)$ est une fonction polynomiale dont le terme de plus haut degré est $n!\, a_n \frac{x^n}{n!}$ donc en x^n

Donc φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$

φ est linéaire par linéarité de l'intégrale.

b) F est une fonction polynomiale, elle est C^∞ donc C^1

Soit G la primitive de $P(t)e^{-t}$ qui s'annule en 0.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = e^x \left(\lim_{t \to +\infty} G(t) - G(x) \right)$

$\lim_{t \to +\infty} G(t)$ existe car $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ converge.

d'où $F'(x) = e^x \left(\lim_{t \to +\infty} G(t) - G(x) \right) - e^x G'(x)$

mais $\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = P(x) e^{-x}$

d'où $F'(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt - P(x)$

donc $F' = F - P$

c) Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = 0$

P étant un polynôme de degré n, $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \pm\infty$ suivant le signe du terme de plus haut degré. Sans perte de généralité (remplacer P par $-P$) supposons $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$

alors $\exists A \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall x \geq A \quad P(x) \geq 0$

On a alors $\int_A^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = 0$

avec $t \mapsto P(t) e^{-t}$ positive et continue donc nulle sur $[A, +\infty[$

mais comme $\forall t \in [A, +\infty[\quad e^{-t} \neq 0 \Rightarrow \forall t \in [A, +\infty[\quad P(t) = 0$

donc P a une infinité de racines alors qu'il est de degré n.

donc P est le polynôme nul.

$\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ donc φ injective donc bijective car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.

8) a) $F' = F - P$ (*)

$\varphi(P) = \lambda P$

. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F'(x) = F(x) - P(x)$

$$= (\lambda - 1) P(x)$$

. Mais $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \lambda P(x)$ donc $F'(x) = \lambda P'(x)$

d'où $\lambda P'(x) = (\lambda - 1) P(x)$

d'où $P'(x) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P(x)$

b) si $\deg P = n \geq 0$ $\quad \deg P' = n - 1$ (ou $-\infty$ si P est constant)

soit λ une valeur propre différente de 1 et P un vecteur propre associé alors $P' = \underbrace{\dfrac{\lambda - 1}{\lambda}}_{\neq 0} P$ incompatibilité des degrés.

Donc $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible.

c) Soit $P = e_0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(P)(x) = e^{x} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$

d'où $\varphi(e_0) = e_0$

e_0 est vecteur propre de φ donc $\lambda = 1$ est valeur propre.

9 a) Considérons $\phi^{-1} : P \mapsto P - P'$ la réciproque de ϕ

soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\varphi(P - P') = \varphi(P) - \varphi(P')$

si $x \in \mathbb{R}$, $\quad \varphi(P')(x) = e^{x} \displaystyle\int_x^{+\infty} P'(t) e^{-t}\, dt$

et $\displaystyle\int_x^{+\infty} P'(t) e^{-t}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_x^{A} P'(t) e^{-t}\, dt$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left[\left[-P(t) e^{-t} \right]_x^A - \int_x^A P(t) e^{-t}\, dt \right]$$

d'où $\varphi(P')(x) = P(x) - \varphi(P)(x)$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi \circ \phi^{-1}(P)(x) = P(x)$

donc $\varphi \circ \phi^{-1} = Id$

. de même $\phi^{-1}(\varphi(P))(x) = \varphi(P(x)) - \varphi(P(x)) + P(x)$ (*)

d'où $\phi^{-1} \circ \varphi = Id$

donc $\varphi = (\phi^{-1})^{-1} = \phi$

6) si $x \geq a$ $\quad \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t}\, dt \geq 0$

car $t \mapsto P(t) e^{-t}$ continue et positive sur $[x, +\infty[$

d'où $e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t}\, dt \geq 0$ donc $F(x) = \psi(P)(x) \geq 0$

mais $\varphi = \psi$

d'où $\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t}\, dt \geq 0$