Partie I Polynômes de Bernstein

① a) $\begin{cases} B_{2,0}(X) = \binom{2}{0} X^0 (1-X)^2 & = 1-2X+X^2 \\ B_{2,1}(X) = \binom{2}{1} X(1-X) & = 2X - 2X^2 \\ B_{2,2}(X) = \binom{2}{2} X^2 & = X^2 \end{cases} \Rightarrow K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) la matrice K_2 est triangulaire inférieure sans zéro sur la diagonale, elle est donc de rang 3 donc $(B_{2,0}; B_{2,1}; B_{2,2})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

c) $\begin{cases} T_2(A_0)(X) = \sum_{k=0}^{2} 1 . B_{n,k}(X) = 1-2X+X^2+2X-2X^2+X^2 = 1 \\ T_2(A_1)(X) = \sum_{k=0}^{2} \frac{k}{2} . B_{n,k}(X) = \frac{1}{2}(2X-2X^2) + X^2 = X \\ T_2(A_2)(X) = \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{4} B_{n,k}(X) = \frac{1}{4}(2X-2X^2) + X^2 = \frac{X+X^2}{2} \end{cases}$

$H_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ H_2 est TSup.

Ses valeurs propres sont 1 et $\frac{1}{2}$

Recherche des sep : E_1 : $\begin{cases} x = x \\ y + \frac{1}{2} z = y \\ \frac{1}{2} z = z \end{cases} \Rightarrow E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \text{Vect}\{1, X\}$

$E_{1/2}$: $\begin{cases} x = \frac{x}{2} \\ y + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} z \end{cases} \Rightarrow E_{\frac{1}{2}} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}\{-X+X^2\}$

② ⓐ le terme de plus petit degré de $B_{n,k}(x)$ est $\binom{n}{k} X^k$ avec $\binom{n}{k} \neq 0$. En conséquence, la matrice de la famille $(B_{n,k})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est triangulaire inférieure avec aucun terme nul sur la diagonale. Elle est donc de rang $n+1$ et forme donc une famille libre à $(n+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$

ⓑ T_n est trivialement un endomorphisme.

$\text{Ker } T_n = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X) = 0 \right\}$

or les $(B_{n,k})_{k \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$

donc si $\sum_{k=0}^{n+1} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!] \quad P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$

P admet donc $n+1$ racines distinctes : $\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ or P est de degré n, c'est donc le polynôme nul.

Donc $\text{Ker } T_n = \{0\}$ T_n est injective. Or T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie donc T_n bijective.

T_n est un automorphisme.

c) $T_n(A_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1 . B_{n,k}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \underset{\uparrow \text{Binôme}}{=} (X+1-X)^n = 1$

$T_n(A_1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} X . X^{k-1} X^{n-1-(k-1)}$

$= X \underset{\uparrow \text{changement d'indice}}{\sum_{k'=0}^{n-1}} \binom{n-1}{k'} X^{k'} (1-X)^{n-1-k'} = X (X+1-X)^{n-1} = X = A_1$

d) $T_n(A^k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k X^j (1-X)^{n-j}$ (*)

Démo par récurrence : initialisation $\deg(T_n(A_0)) = 0$

On suppose, il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\deg(T_n(A_k)) = k$

$T_n(A_{k+1})(X) = \frac{1}{n} X(1-X) (T_n(A_k))'(X) + X \, T_n(A_k)(X)$

$\deg T_n(A_k)' = k-1 \Rightarrow \deg(X(1-X) T_n(A_k)') = k-1+2 = k+1$

$\deg X \, T_n(A_k) = k+1$

d'où $\deg T_n(A_{k+1}) = k+1$ hérédité de la proposition.

Donc par le principe de récurrence $\deg T_n(A_k) = k$

e) on reprend la formule (*). Le coefficient de X^k dans ce polynôme est obtenu en écrivant que $(1-X)^{n-j} = \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} X^i$

d'où $T_n(A^k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} X^{i+j}$

puis en ne retenant que les termes tels que $i+j = k$

d'où $\alpha_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{k-j} \binom{n-j}{k-j}$ (sans garantie) ☺

3) a) soit $\varepsilon > 0$ $\quad P(|\overline{Z_n} - z| > \varepsilon) = P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - z\right| > \varepsilon\right)$

$= P(|Z_n - nz| > n\varepsilon)$

Mais Z_n est une binomiale $E(Z_n) = nz$

d'où $P(|\overline{Z_n} - z| > \varepsilon) = P(|Z_n - E(Z_n)| > n\varepsilon)$

On peut donc utiliser Bienaymé Tchebychev

$P(|\overline{Z_n} - z| > \varepsilon) \leq \frac{Var(Z_n)}{n^2 \varepsilon^2}$

Avec $Var(Z_n) = n z(1-z)$

d'où $P(|\overline{Z_n} - z| > \varepsilon) \leq \frac{z(1-z)}{n \varepsilon^2}$

or $\lim_{n \to +\infty} \frac{z(1-z)}{n\varepsilon^2} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} P(|\overline{Z_n} - z| > \varepsilon) = 0$ cqfd

ⓑ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $z \mapsto f(z)$ est continue sur le compact $[0,1]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Il en est de même pour $|f|$

donc $\exists M \in \mathbb{R}^+ \ / \ M = \max_{[0,1]} |f|$

ⓒ $|f(\bar{Z}_n) - f(z)|$? (On remarque que $\mathbb{E}(f(\bar{Z}_n)) = \sum_{k=0}^{n} P(Z_n = k) \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$

or $P(Z_n = k) = \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k}$

d'où $\underset{(**)}{\mathbb{E}(f(\bar{Z}_n))} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = f_n(z)$) en passant ...

$$|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \leq |f(\bar{Z}_n) - f(z)| \mathbb{1}_{U_n} + |f(\bar{Z}_n) - f(z)| \mathbb{1}_{\bar{U}_n}$$

Mais $|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \mathbb{1}_{\bar{U}_n} \leq \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\bar{U}_n}$

et $|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \mathbb{1}_{U_n} \leq (|f(\bar{Z}_n)| + |f(z)|) \mathbb{1}_{U_n}$
$\leq 2M \, \mathbb{1}_{U_n}$

ⓓ On reprend $(**)$ démontrée trop tôt

On a : $\mathbb{E}(f(\bar{Z}_n)) = f_n(z)$ (dès qu'on aura montré que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(f(\bar{Z}_n)) = f(z)$ on aura montré ce qu'on cherche))

$$|\mathbb{E}(f(\bar{Z}_n)) - f(z)| = |\mathbb{E}(f(\bar{Z}_n) - f(z))|$$
$$\leq \mathbb{E}(|f(\bar{Z}_n) - f(z)|)$$
$$\leq \mathbb{E}(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \mathbb{1}_{U_n}) + \mathbb{E}(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \mathbb{1}_{\bar{U}_n})$$

or $\mathbb{E}(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \mathbb{1}_{U_n}) \leq 2M \, P(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| > \varepsilon)$ ⓐ

et $\mathbb{E}(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \mathbb{1}_{\bar{U}_n}) \leq \varepsilon \, P(|f(\bar{Z}_n) - f(z) \leq \varepsilon)$ ⓑ

dans ⓑ on majore simplement $P(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \leq \varepsilon)$ par 1

Dans ⓐ : pour majorer $P(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| > \varepsilon)$ on va utiliser le fait que $\bar{Z}_n$ converge en proba vers z et que f est continue, donc $f(\bar{Z}_n)$ converge en proba vers $f(z)$ donc $\lim_{n \to +\infty} P(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| > \varepsilon) = 0$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad P(|f(\bar{Z}_n) - f(z)| > \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$

d'où $\forall n \geq n_0 \quad |\mathbb{E}(f(\bar{Z}_n)) - f(z)| \leq 2\varepsilon$

d'où $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(f(\bar{Z}_n)) = f(z)$

or on a montré en $(**)$ que $\mathbb{E}(f(\bar{Z}_n)) = f_n(z)$

d'où $\lim_{n \to +\infty} f_n(z) = f(z)$

4 a)

```
function Z = binom(n, z)
    Z = 0
    for k = 1:n
        A = rand()
        if (A < z) then
            Z = Z + 1
        end
    end
endfunction
```

b) Calcul approché de $f(z)$ en utilisant le fait que $\lim_{n \to +\infty} E(f(\overline{Z}_n)) = f(z)$

On pose $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de va aléatoires définies par $\forall i \in \mathbb{N}$ $X_i = f(\overline{Z}_n)$

alors la loi faible des grands nombres (qui s'applique ici car les X_i sont bien iid deux à deux non corrélées admettant des moments d'ordre 2 - f est continue)

donc $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} E(X_j) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} E(f(\overline{Z}_n))$

donc le programme donne une valeur approchée de $E(f(\overline{Z}_n))$ qui est elle-même une valeur approchée de $f(z)$.

Partie II Lagrange.

5 a) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ (il faut le rappeler pour n'avoir à démontrer que l'injectivité de ϕ et conclure à sa bijectivité en dimension finie)

ϕ est trivialement linéaire.

soit $P \in \operatorname{Ker} \phi$ alors $P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0$ donc P a $n+1$ racines alors que son degré est inférieur ou égal à n donc P est le polynôme nul.

$\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$, ϕ injective donc bijective car $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ est finie.

b) soit $i \in [\![0, n]\!]$

$\phi(L_i) = e_i$ par bijectivité on sait qu'il existe un unique polynôme vérifiant cette assertion.

Vérifions que le polynôme $P_i(X) = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$ est également solution

$j \neq i$ $P_i(x_j) = 0$ car l'un des x_k du numérateur vaut x_j

$j = i$ $P_i(x_i) = 1$ car numérateur et dénominateur sont égaux

d'où $\phi(P_i) = e_i$ donc comme ϕ est un isomorphisme $P_i = L_i$

c) φ est évidemment symétrique et bilinéaire (il suffit de l'écrire)

φ est positive. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)^2 \geq 0$

- φ est définie, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, $\sum_{k=0}^{n} P(x_k)^2 = 0$
alors $\forall i \in [\![0,n]\!]$ $\quad P(x_i) = 0 \Rightarrow P \in \mathrm{Ker}\,\phi \Rightarrow P \equiv 0$

- Soient $(i,j) \in [\![0,n]\!]$ avec $i \neq j$

$\sum_{k=0}^{n} L_i(x_k) L_j(x_k) = 0$ car par construction des L_i, on a
$L_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $L_j(x_k) \neq 0$ si $k \neq j$

donc cette somme vaut $L_i(x_i).0 + L_j(x_j).0 = 0$

si $i = j$ $\quad \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k) L_j(x_k) = L_i(x_i)^2 = 1^2 = 1$

la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormée, elle est donc libre et elle comporte $n+1$ vecteurs. C'est une base.

(d) Comme $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormée, les coordonnées de X^k pour $k \in [\![0,n]\!]$ sont données par : $X^k = \sum_{j=0}^{n} \varphi(X^k, L_j) . L_j$

- $X^k = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^k . L_j(x_i) \right) L_j = \sum_{j=0}^{n} \left(x_j^k \right) L_j$

D'où la matrice demandée :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & & x_0^k & & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^k & & x_n^n \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\quad\uparrow k \end{array}$$

Matrice dite de Vandermonde.

(e) L'existence et l'unicité découlent du fait que ϕ est une bijection.

$P_f = \phi^{-1}(f(x_0), \dots, f(x_n))$

et $P_f(X) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(X)$ $\qquad$ (il suffit de mq $P_f(x_j) = f(x_j)$ $\forall j \in [\![0,n]\!]$)

(6) (a) $Q_f(X) - P_f(X)$ est de degré inférieur ou égal à $n+1$ et il s'annule en $n+1$ points à savoir $x_0, \dots, x_n$ qui forment $n+1$ racines distinctes le théorème de factorisation dans $\mathbb{R}_n[X]$ nous indique donc que
$Q_f(X) - P_f(X)$ est scindé et $\exists c \in \mathbb{R}$ / $Q_f(X) - P_f(X) = c(X - x_0) \dots (X - x_n)$

b) $h(t) = f(t) - Q_f(t)$ s'annule bien en $\bar{x}, x_0, \dots, x_m$ car Q_f est le polynôme d'interpolation de Lagrange en ces points.

Rolle ... sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour les i tels que $\bar{x} \notin [x_i, x_{i+1}]$ (on fait le même raisonnement sur $[x_k, \bar{x}]$ et $[\bar{x}, x_{k+1}]$)

ce $\bar{x}$ nous em.... un peu ☺, on pourrait poser $y_0 = x_0, \dots, y_{k+1} = \bar{x}, \dots$ $y_{m+1} = x_m$ et travailler gentiment avec les y_i)

Bref h continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et $h(x_i) = h(x_{i+1}) = 0$ donc $\exists\, x_{i+1}^{(1)} \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $h'(x_{i+1}^{(1)}) = 0$ (Rolle)

et donc on trouve $m+1$ réels distincts $x_1^{(1)}, \dots, x_{m+1}^{(1)}$ appartenant à $]x_0, x_1[,]x_1, x_2[, \dots,]x_k, \bar{x}[, \dots,]x_{m-1}, x_m[$ tels que $\begin{cases} h'(x_1^{(1)}) = 0 \dots \\ \vdots \\ h'(x_{m+1}^{(1)}) = 0 \end{cases}$

On itère le processus m fois puisque h est C^{m+1} comme différence d'un polynôme et d'une fonction C^1.

On passe de l'étape j à l'étape $j+1$ de la façon suivante

on n'en a plus que $m-j+2$

$h^{(j)}$ est C^1 sur $[x_i^{(j)}, x_{i+1}^{(j)}]$ donc continue sur $[x_i^{(j)}, x_{i+1}^{(j)}]$ et dérivable sur $]x_i^{(j)}, x_{i+1}^{(j)}[$

et $h^{(j)}(x_i^{(j)}) = h^{(j)}(x_{i+1}^{(j)}) = 0$

donc $\exists\, x_i^{(j+1)} \in]x_i^{(j)}, x_{i+1}^{(j)}[$ tel que $h^{(j+1)}(x_{i+1}^{(j+1)}) = 0$

et bien entendu à la m-ième étape, il ne reste plus que 2 points à traiter $x_1^{(m)}$ et $x_2^{(m)}$ à qui on réapplique Rolle puisque $h^{(j)}$ est C^1 sur $[a, b]$ donc sur $[x_1^{(m)}, x_2^{(m)}]$

Il y a moyen de faire plus ... rigoureux ☺

ⓒ Jean-Pierre Demailly doit être content de cette question ! (Analyse Numérique et Equations Différentielles - Ed EDP)

$h(t) = f(t) - Q_f(t) = f(t) - P_f(t) - \delta\,\omega(t)$

On a $h^{(m+1)}(\theta) = 0$

or $P_f^{(m+1)}(t) = 0$ car P_f est de degré m.

$\omega^{(m+1)}(t) = (m+1)!$ en effet ω est un polynôme unitaire dont le terme de plus haut degré est X^{m+1}

d'où $\omega^{(m+1)}(t) = (m+1)!$

Donc $h^{(n+1)}(\theta) = 0 = f^{(n+1)}(\theta) - \delta(n+1)! \Rightarrow \delta = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$

d'où $f(x) - Pf(x) = f(x) - Qf(x) + Qf(x) - Pf(x)$

$= f(x) - Qf(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,\omega(x)$

donc en $\bar{x}$, on a

$$f(\bar{x}) - Pf(\bar{x}) = 0 + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\,\omega(\bar{x}) \qquad \text{cqfd}$$

d) si $t \in [a,b]$ 1e cas : t est l'un des $x_0, \dots, x_n$

alors $|Pf(t) - f(t)| = 0 \leq \dfrac{1}{(n+1)!}|\omega(t)| \times \sup\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

2e cas : t n'est aucun des $x_0, \dots, x_n$

On pose alors $\bar{x} = t$ et $\exists\, \theta(t) \in]a,b[$ tel que

$$|P_f(t) - f(t)| = \frac{1}{(n+1)!}|\omega(t)| \,.\, f^{(n+1)}(\theta(t))$$

or $\forall\, u \in [a,b]$ $|f^{(n+1)}(u)| \leq \sup\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

d'où $|Pf(t) - f(t)| \leq \dfrac{1}{(n+1)!}|\omega(t)| \,.\, \sup\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

III Phénomène de Runge

: trouver une fonction telle que l'interpolation de Lagrange rende l'âme (sic) aux voisinages de certains points pour des n pas bien grands...

a) $t \mapsto t^2 + e^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas donc comme quotient de fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas, f_e est C^∞ sur $\mathbb{R}$

b) f est paire donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x)$. f est C^∞, on peut dériver cette expression : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -f'(-x)$ f' est impaire.

et $|f'(x)| = |f'(-x)|$

f' est impaire donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -f'(-x)$ on dérive et donc

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = f''(-x)$ donc f'' est paire et $|f''(x)| = |f''(-x)|$

et là ... à vous d'itérer ! pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f^{(n)}(x)| = |f^{(n)}(-x)|$

c) si $|x| < e$ considérons la série géométrique de terme générique

$u_n = (-1)^n \left(\left(\dfrac{x}{e}\right)^2\right)^n$ elle est convergente car $\left|\left(\dfrac{x}{e}\right)^2\right| < 1$

sa somme vaut $\dfrac{1}{1 - \left(-\left(\frac{x}{e}\right)^2\right)} = \dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{e^2}}$

d'où $\frac{1}{e^2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{e^{2k}} = \frac{1}{e^2} \frac{1}{1+\frac{x^2}{e^2}} = \frac{1}{x^2+e^2}$ cqfd.

8 a $\frac{p}{e-x} + \frac{q}{e+x} = \frac{ep + px + eq - qx}{e^2 - x^2} = \frac{x(p-q) + e(p+q)}{e^2-x^2}$

par unicité des décompositions polynomiales $\begin{cases} p-q=0 \\ p+q=e \end{cases}$

d'où $p = q = \frac{e}{2}$

b comme v est paire sur $]-e,e[$, on peut refaire la microdémo de la question 7.b pour montrer que $\forall x \in]-e,e[\quad |v^{(n)}(x)| = |v^{(n)}(-x)|$

c Posons pour $p \in \mathbb{N}$ $u_p = 0$ si p impair $u_p = \frac{(-1)^k}{e^{2k+2}}$ avec $k = p/2$ si p pair

$v_p = 0$ si p impair $v_p = \frac{1}{e^{2k}}$ si p pair

(on a, bien entendu, $v(x) = \frac{e^2}{e^2\left(1-\left(\frac{x}{e}\right)^2\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^{2k}$ (même démo qu'au 7))

et v C^∞

les séries $u_p A_p(t)$ et $v_p A_p(t)$ convergent

et $f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p A_p(t)$ $v(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} v_p A_p(t)$

$$\begin{cases} f^{(n)}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \cdot A_p^{(n)}(t) = \sum_{\substack{p \text{ pairs} \\ p=2k}} \frac{(-1)^k}{e^{2k+2}} A_{2k}^{(n)}(t) \\ v^{(n)}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} v_p A_p^{(n)}(t) = \sum_{2k} \frac{1}{e^{2k}} A_{2k}^{(n)}(t) \end{cases}$$

soit $N \in \mathbb{N}$ $\left| \sum_{\substack{p \text{ pair} \\ p=2k}}^{N} \frac{(-1)^k}{e^{2k+2}} A_{2k}^{(n)}(t) \right| \leq \sum_{\substack{p \text{ pairs} \\ p=2k}}^{N} \left| \frac{1}{e^{2k+2}} A_{2k}^{(n)}(t) \right|$

. si $t \in [0,e[$ $A_{2k}^{(n)}(t) \geq 0$ on peut supprimer les $| \; |$ à droite

d'où en faisant tendre N vers $+\infty$

on a $|f^{(n)}(t)| \leq \frac{1}{e^2} |v^{(n)}(t)|$ $(*)$

Mais on a montré que $|f^{(n)}(t)| = |f^{(n)}(-t)|$

et $|v^{(n)}(t)| = |v^{(n)}(-t)|$

donc $(*)$ est vraie pour $t \in]-e,0]$.

(d) $e > 1$ $\qquad v(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{e-x} + \frac{1}{2} \frac{e}{e+x}$

$$v^{(n)}(x) = \frac{e}{2} \frac{n!}{(e-x)^{n+1}} + \frac{e}{2} \frac{(-1)^n n!}{(e+x)^{n+1}}$$

$$|v^{(n)}(x)| \leq \frac{e}{2} \left| \frac{n!}{(e-x)^{n+1}} \right| + \frac{e}{2} \left| \frac{n!}{(e+x)^{n+1}} \right|$$

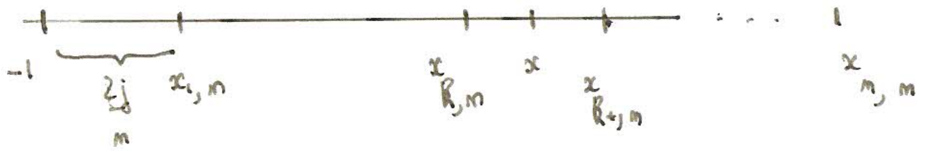
or

$$x \in]-1, 1[\quad \begin{cases} 0 \leq e-1 \leq e-x \leq e+1 \\ \qquad \text{d'où} \quad \frac{1}{e-x} \leq \frac{1}{e-1} \\ 0 \leq e-1 \leq e+x \leq e+1 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{e+x} \leq \underbrace{\frac{1}{e-1}}_{\geq 0} \end{cases}$$

d'où $|v^{(n)}(x)| \leq 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{n!}{(e-1)^{n+1}}$

d'où $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{e} \frac{n!}{(e-1)^{n+1}}$

(9) (a) $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (X - x_{j,n}) = (x - x_{0,n}) \cdots (x - x_{k,n}) \overbrace{(x - x_{k+1,n})}^{\frac{2j}{n}} \cdots (x - x_{n,n})$



- pour $\ell < k$ $\qquad |x - x_{\ell,n}| \leq (k+1-\ell) \frac{2}{n}$
- pour $\ell > k+1$ $\qquad |x - x_{\ell,n}| \leq (\ell - k) \frac{2}{n}$
- $|x - x_{k,n}| \leq \frac{2}{n}$ et $|x - x_{k+1,n}| \leq \frac{2}{n}$

D'où $|\omega_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \underbrace{\prod_{\ell=0}^{k} (k+1-\ell)}_{=(k+1)!} \cdot \prod_{\ell=k+2}^{n} (\ell - k)$

$$\prod_{\ell=k+2}^{n} (\ell - k) = 2 \cdot 3 \cdots (n-k) = (n-k)!$$

d'où $|\omega_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} (k+1)!\,(n-k)!$

D'autre part : $n! = (k+1)!\,(k+2) \cdots (k+n-k)$

$(n-k)! = 2 \cdots (n-k) \leq (k+2) \cdots (k+n-k)$.

d'où $|\omega_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} (k+1)!\,(n-k)!$

(b) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

$$\frac{n!}{n^{n+1}} \sim \frac{1}{e^{n+1}} \frac{\sqrt{2\pi}\, e}{\sqrt{n}} \quad \text{donc apcr} \quad \frac{n!}{n^{n+1}} \leq \frac{1}{e^{n+1}}$$

d'où apcr $|\omega_n(x)| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}$

(c) on suppose $\rho > 1 + \frac{2}{e}$

$$|f_\rho(x) - Pf_\rho(n)(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |\omega_n(t)| \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} \cdot \frac{n!}{\rho(\rho-1)^{n+1}}$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\rho}\left(\frac{2}{e(\rho-1)}\right)^{n+1}$$

or $\rho > 1 + \frac{2}{e}$ donc $\rho - 1 > \frac{2}{e}$ donc $e(\rho-1) > 2$ donc $\frac{2}{e(\rho-1)} < 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{e(\rho-1)}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim |f_\rho(x) - Pf_\rho(n)(x)| = 0$.

10) (a) on pose $\begin{cases} u(t) = \ln(t^2+\rho^2) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ $\quad u'(t) = \frac{2t}{t^2+\rho^2}$, $\quad v(t) = t$

les fonctions u et v sont C^1, l'IPP est donc licite.

$$H(\rho) = \frac{1}{4}\left[t\ln(t^2+\rho^2)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{2t^2}{t^2+\rho^2}$$

classique : $\frac{t^2}{t^2+\rho^2} = 1 - \frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(1+\rho^2) + \ln(1+\rho^2)\right] - \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t^2+\rho^2}{t^2+\rho^2}\,dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - \frac{1}{2}[t]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\rho^2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\rho}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \frac{1}{2}\rho\left[\operatorname{Arctan}\frac{t}{\rho}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \frac{1}{2}\rho\left(\underbrace{\operatorname{Arctan}\frac{1}{\rho} - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\rho}\right)}\right)$$

lorsque ρ tend vers 0 $\ln(1+\rho^2)$ tend vers 0. $\to = \operatorname{Arctan}\frac{1}{\rho}$ (parité)

$\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{\rho}\right.$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arctan} -\frac{1}{\rho}$ tend vers $\left.-\frac{\pi}{2}\right)$

donc $\lim_{\rho \to 0} \rho\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{\rho} - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right) = 0$ d'où $\lim_{\rho \to 0} H(\rho) = -1$

$H(\rho)$ peut être prolongée par continuité en 0 en posant $H(0) = -1$

(b) Soit $(\rho, \rho') \in \mathbb{R}^+$ tels que $\rho > \rho'$ alors $\forall t \in [-1, 1]$ $\ln(t^2 + \rho^2) > \ln(t^2 + \rho'^2)$

or les fonctions $x \mapsto \ln(x^2 + \rho^2)$, $x \mapsto \ln(x^2 + \rho'^2)$ sont continues et strictement positives sur $[-1, 1]$

On peut donc intégrer l'inégalité stricte entre -1 et 1 d'où $H(\rho) > H(\rho')$

donc H est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$\lim_{\rho \to +\infty} H(\rho) = \lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) = +\infty$$

· $H(0) = -1$

donc H réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$

(c) $\ln 2 - 1 \approx -0{,}307$ donc $\ln 2 - 1 \in [-1, +\infty[$ donc comme H est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$ $\exists ! \rho_0 \in [0, +\infty[$ tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$

D'autre part $H(1) = \frac{\ln 2}{2} - 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} - 1 > 0$

comme H est bijective et croissante et que $H(0) = -1$, $H(1) > 0$ et que $-1 < \ln 2 - 1 < 0$ alors $\rho_0 \in]0, 1[$ donc $\rho_0 < 1$

(d) $\rho > 0$

· $|\omega_n(i\rho)| \geq 0$ $\quad |\omega_n(i\rho)| = \prod_{k=0}^{n} |i\rho - x_{k,n}|$

or $i\rho$ est imaginaire pur donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $i\rho - x_{k,n} \neq 0$

d'où $|\omega_n(i\rho)| > 0$

· $\ln|\omega_n(i\rho)|$ est donc bien défini pour tout $\rho > 0$

$$\ln|\omega_n(i\rho)| = \sum_{k=0}^{n} \ln|i\rho - x_{k,n}| = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\rho^2 + \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2\right)$$

· Considérons $\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(\rho^2 + (2x - 1)^2\right)$ $\tilde{f}$ continue donc intégrable.

alors à un terme près $\frac{1}{n} \ln|\omega_n(i\rho)|$ est la somme inférieure s_n de Riemann associée à $\tilde{f}$

donc $\frac{1}{n} \ln|\omega_n(i\rho)| = \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{2n} \ln(\rho^2 + 1)$

or $\lim_{n \to +\infty} s_n = \int_0^1 \tilde{f}(t)\, dt$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \ln(\rho^2 + 1) = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln|\omega_n(i\rho)| = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{f}(t)\, dt$

or $\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left(e^2+(2x-1)^2\right)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \ln(e^2+x^2)\,dx = H(e)$

changement de variable affine $u = 2x-1$

donc $\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \ln|\omega_m(ie)| = H(e)$.

(11) a). Méthode de dichotomie (recherche d'un zéro d'une fonction)

. $G(s_0) = 0$ soit $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+s_0^2}{4}\right) + s_0 \arctan\frac{1}{s_0} = 0$

b) . e_0 vérifie $H(e_0) = \ln 2 - 1$

soit $\frac{1}{2}\ln(1+e_0^2) - 1 + e_0 \operatorname{Arctan}\frac{1}{e_0} = \ln 2 - 1$

soit

$\frac{1}{2}\ln(1+e_0^2) - 2\ln 2 + e_0 \operatorname{Arctan}\frac{1}{e_0} = 0$

soit $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e_0^2}{4}\right) + e_0 \operatorname{Arctan}\frac{1}{e_0} = 0$

d'où par bijectivité $s_0 = e_0$

(12) (a) $S_m(x) = 1-(x^2+e^2)\,P_{f_{e,m}}(x)$ $\qquad \deg S_m \leq m+2$

or $f_e(x) - P_{f_{e,m}}(x) = \frac{1}{e^2+x^2} - P_{f_{e,m}}(x) = \frac{1-(e^2+x^2)P_{f_{e,m}}(x)}{e^2+x^2}$

$= \frac{S_m(x)}{e^2+x^2}$

donc $\forall k \in [\![0,m]\!]$ $\quad S_m(x_{k,m}) = 0$ car $f_e(x_{k,m}) - P_{f_{e,m}}(x_{k,m}) = 0$

donc les $x_{k,m}$ sont racines de S_m

donc $\prod_{k=0}^{m}(X - x_{k,m})$ divise S_m

(b) Les $x_{k,m}$ sont deux à deux symétriques par rapport à 0 et f_e est une fonction paire. Donc $P_{f_{e,m}}$ est pair (on regroupe chaque terme $f(x_k)\prod_{j\neq k}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)$ avec le symétrique)

(c) $y_m = 1-\frac{1}{m}$ $\qquad |\omega_m(y_m)| = \prod_{k=0}^{m}\left(1-\frac{1}{m}+1-\frac{2k}{m}\right)$

$= \prod_{k=0}^{m}\left(2-\frac{2k+1}{m}\right)$

13

$$|\omega_n(y_n)| = \left| \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{2n-(2k+1)}{n} \right) \right| = \left| \frac{1}{n^{n+1}} \prod_{k=0}^{n} (2n-2k-1) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n^{n+1}} (2n-1)(2n-3)\dots(1)(-1) \right|$$

$$= \frac{1}{n^{n+1}} \frac{(2n-1)(2n-2)\dots 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 2}$$

$$= \frac{1}{n^{n+1}} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

- $(2n-1)! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{2n-1}$

$(n-1)! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n-1}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}$ $\qquad \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n-1}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2}$

$$\frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \sim \frac{1}{e^n} 2^{2n-1} . \sqrt{2}\, n^n$$

d'où $|\omega_n(y_n)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} . \frac{2^n}{e^n} . \sqrt{2}$

on pose $\sigma = \frac{2}{e}$, $\tau = \sqrt{2}$ $\qquad |\omega_n(y_n)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\tau}{n}\sigma^n$

(d) $\lim_{n \to +\infty} \left(\ln|\omega_n(i\rho)| - nH(\rho) \right) = 0$

donc $e^{\ln|\omega_n(i\rho)|} \underset{+\infty}{\sim} e^{nH(\rho)}$

soit $|\omega_n(i\rho)| \underset{+\infty}{\sim} e^{nH(\rho)}$ avec $e^{nH(\rho)} = (H(\rho))^n$

d'où $\left| \frac{\omega_n(y_n)}{\omega_n(i\rho)} \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\tau}{n} \left(\frac{\sigma}{H(\rho)} \right)^n$

13 (a) On suppose n impair $\qquad n = 2p+1$

$k \in [\![0, n]\!]$
$$\begin{cases} . \; x_{0,n} = -1 = -x_{n,n} \\ x_{1,n} = -1 + \frac{2}{2p+1} = -x_{n-1,n} \qquad \text{car } -1 + \frac{2(n-1)}{n} = -\left(-1 + \frac{2}{n}\right) \\ \vdots \\ x_{p,n} = -x_{p+1,n} \end{cases}$$

donc $\forall k \in [\![0, p]\!]$ $(i\rho - x_{n-k,n}) = (i\rho + x_{k,n}) =$

d'où $(x_{k,n} + i\rho)(i\rho - x_{k,n}) = x_{k,n}^2 - \rho^2 \in \mathbb{R}^*$

Donc $\omega_m(i\rho) = \prod_{k=0}^{p} (x_{k,m}^2 - \rho^2) \in \mathbb{R}^*$

↑ on a regroupé 2 à 2 $(i\rho - x_{k,m})$ et $(i\rho - x_{m-k,m})$

ⓑ $|f_p(x) - Pf_{\rho,m}(x)| = \left| \dfrac{S_m(x)}{x^2+\rho^2} \right|$

Mais ω_m divise S_m et degré $S_m \leq m+2$

donc $S_m(X) = \omega_m(X)(aX+b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Or S_m est pair car $Pf_{\rho,m}$ est pair, comme ω_m est pair aussi (produits de $2p+2$ termes) alors nécessairement $a = 0$.
$m=2p+1)$ ↳ "symétriques / 0"

Donc $S_m(X) = b\,\omega_m(X)$

D'où $b = \dfrac{S_m(i\rho)}{\omega_m(i\rho)}$ (puisque $\omega_m(i\rho) \in \mathbb{R}^*$)

avec $S_m(i\rho) = 1 - ((i\rho)^2 + \rho^2) Pf_{\rho,m}(i\rho) = 1$

d'où $b = \dfrac{1}{\omega_m(i\rho)}$

d'où $|f_p(x) - Pf_{\rho,m}(x)| = \dfrac{1}{|\omega_m(i\rho)|} \cdot \dfrac{|\omega_m(x)|}{x^2+\rho^2}$

$= f_p(x) \left| \dfrac{\omega_m(x)}{\omega_m(i\rho)} \right|$

(14) ⓐ $f_p(y_n) - Pf_{\rho,m}(y_n) = f_p(y_m) \dfrac{\omega_m(y_n)}{\omega_m(i\rho)}$

$\left| \dfrac{\omega_m(y_n)}{\omega_m(i\rho)} \right| \sim \dfrac{\tau}{m} \left(\dfrac{\sigma}{H(\rho)} \right)^m$

$\lim_{m \to +\infty} f_p(y_n) = f_p(1)$ par continuité de f

d'où $\lim_{m \to +\infty} f_p(y_n) = \dfrac{1}{1+\rho^2}$

$\ln 2 - 1 \sim -0,307$

$\sigma = \dfrac{2}{e}$ on $0 < \rho < \rho_0$ donc $-1 < H(\rho) < \ln 2 - 1$

Pour des ρ proches de ρ_0 $\lim_{m \to +\infty} \left(\dfrac{\sigma}{H(\rho)} \right)^m = +\infty$ donc par croissance comparée

$\lim |f_p(y_n) - Pf_{\rho,m}(y_n)| = +\infty$

ⓑ Par continuité de $|f_p(x) - Pf_{\rho,m}(x)|$, compte tenu de 14 ⓐ