ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2003

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Lundi 19 Mai 2003 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel et par :
- $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $C^n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $\mathbf{R}$.
  En particulier, $C^0(\mathbf{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbf{R}$.

A toute fonction f appartenant à $C^0(\mathbf{R})$, on associe l'application notée ϕf définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\phi f(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt.$$

On définit ainsi un endomorphisme ϕ de l'espace vectoriel $C^0(\mathbf{R})$ dont on se propose dans la suite d'étudier quelques propriétés au travers de parties qui sont largement indépendantes.

PARTIE I : Généralités

1°) Dans cette question, on étudie quelques propriétés de ϕf en fonction de celles de f.

a) Prouver l'égalité suivante, pour toute fonction continue f et tout nombre réel x :

$$\phi f(x) = \int_0^1 f(x+u-1)\,du.$$

b) On suppose la fonction f paire (resp. impaire). Exprimer $\phi f(-x)$ en fonction de $\phi f(x+1)$.

c) On suppose la fonction f croissante (resp. décroissante). Est-ce le cas de ϕf ?

d) On suppose la fonction f convexe (resp. concave). Est-ce le cas de ϕf ?

e) On suppose que la fonction f a une limite L en $\pm\infty$. Est-ce le cas de ϕf ?

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL. : 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PRIVE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

2°) Dans cette question, on étudie l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbf{R}_n[x]$.

a) Montrer que $\mathbf{R}_n[x]$ est stable par ϕ. On note alors ϕ_n l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbf{R}_n[x]$.

b) Déterminer la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[x]$.

c) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_n.

3°) Dans cette question, on étudie l'injectivité et la surjectivité de ϕ.

a) Montrer, pour toute fonction f de $C^0(\mathbf{R})$, que ϕf est de classe C^1 et préciser sa dérivée.
Pour quelles valeurs du nombre entier j l'espace vectoriel $\phi(C^k(\mathbf{R}))$ est-il inclus dans $C^j(\mathbf{R})$?

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est formé des fonctions 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période.

c) L'endomorphisme ϕ est-il surjectif ? injectif ?

4°) Dans cette question, on étudie les éléments propres de ϕ.

a) On considère une valeur propre λ de l'endomorphisme ϕ, autrement dit un nombre réel λ tel qu'il existe une fonction non nulle f appartenant à $C^0(\mathbf{R})$ vérifiant $\phi f = \lambda f$.
Montrer que toute fonction propre f associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$, c'est à dire toute fonction continue non nulle f telle que $\phi f = \lambda f$, est nécessairement de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Quelles sont les fonctions-polynômes f qui sont fonctions propres de ϕ ?

c) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, qu'il existe une et une seule fonction exponentielle f définie par $f(x) = e^{ax}$ $(a \in \mathbf{R})$ telle que $\phi f = \lambda f$.
En déduire que tout nombre réel $\lambda > 0$ est valeur propre de ϕ.

d) Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 1$, que la seule fonction bornée f appartenant au sous-espace propre associé à λ est la fonction nulle.

Dans la suite du problème, on étudie le sous-espace propre $E_1(\phi)$ associé à la valeur propre 1, c'est à dire l'ensemble des fonctions continues f vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x, ou :

$$\int_{x-1}^{x} f(t)dt = f(x).$$

PARTIE II : Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\phi)$

1°) On considère la fonction f_0 définie de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ par $f_0(0) = f_0(1) = 0$ et pour $0 < x < 1$ par :

$$f_0(x) = (x - \frac{1}{2})\exp(\frac{1}{x(x-1)}).$$

a) Montrer que la courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point $(1/2\ , 0)$.

b) Montrer que f_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

2°) On définit alors par récurrence à partir de f_0 une suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_{n+1}(x) = f_n(1)\exp(x) - \exp(x)\int_0^x f_n(t)\exp(-t)dt.$$

a) Montrer que f_{n-1} est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et vérifie $(f_{n+1})' = f_{n+1} - f_n$. En déduire que :

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t))dt.$$

b) Montrer que $f_{n+1}(0) = f_n(1)$. En déduire que :

$$f_n(1) = \int_0^1 f_n(t)dt.$$

c) Etablir enfin, pour tout nombre réel x de [0, 1], que $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)dt + \int_x^1 f_n(t)dt$.

d) On note f l'application définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ où $n \in \mathbf{N}$ par $f(x) = f_n(x-n)$.
Ainsi, la fonction f est définie sur la réunion de ces intervalles $[n, n+1[$, et donc sur $[0, +\infty[$.
Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt$ pour tout nombre réel $x \geq 1$.

3°) On prolonge la fonction f définie ci-dessus sur $[0, +\infty[$ en une fonction définie sur $[-1, +\infty[$.
A cet effet, on pose $f(x) = f(x+1) - f'(x+1)$ pour $-1 \leq x < 0$.
Montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt$ pour tout nombre réel $x \geq 0$.
En réitérant ce même procédé sur $[-2, +\infty[$, $[-3, +\infty[$, etc, on obtient une fonction f continue sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x (on ne demande pas d'expliciter ce raisonnement).

PARTIE III : Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\phi)$

On désigne toujours par f une application de $E_1(\phi)$ et par n un nombre entier naturel.

1°) On étudie dans cette question les suites (M_n) et (m_n) des maxima et minima de f sur $[n, n+1]$.

a) Justifier l'existence du maximum M_n de la fonction f sur l'intervalle $[n, n+1]$, puis celle d'un nombre réel x_n appartenant à $[n, n+1]$ tel que $f(x_n) = M_n$.

b) On suppose $n \geq 1$. Montrer que :
- $f'(x_n) = 0$ si $n < x_n < n+1$, et comparer alors $f(x_n-1)$ à $f(x_n)$.
- f est constante sur $[n, n+1]$ si $x_n = n+1$.

En déduire dans tous les cas que $M_{n-1} \geq M_n$.

c) On définit de même le minimum m_n de la fonction f sur l'intervalle $[n, n+1]$.
Etablir la monotonie de la suite (m_n) et en déduire la convergence des suites (M_n) et (m_n).

2°) On étudie dans cette question l'existence d'une limite éventuelle de f en $+\infty$ et on pose :

$$L = 2\int_0^1 tf(t)dt.$$

a) Calculer la dérivée de l'application $x \rightarrow g(x) = \int_x^{x+1}(t-x)f(t)dt$ et exprimer $g(x)$ à l'aide de L.

b) Justifier l'inégalité suivante pour $x \geq n$:

$$0 \leq \int_x^{x+1}(t-x)(M_n - f(t))dt \leq M_n - f(x+1).$$

En l'appliquant avec $x = x_{n+1} - 1$, en déduire que $0 \leq \frac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}$.

c) Etablir une inégalité analogue faisant intervenir L, m_n et m_{n+1}, et en déduire enfin que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

PARTIE IV : Recherche des fonctions bornées de $E_1(\phi)$

On désigne maintenant par f une application bornée de $E_1(\phi)$ et on note alors :

$$M = \sup\{\, |f(x)| \;/\; x \in \mathbf{R} \,\}.$$

1°) On étudie dans cette question la fonction u_0 définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$u_0(x) = \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt.$$

a) Comparer u_0 et $\phi f^2 - f^2$ (ou $\phi(f^2) - f^2$).
b) Calculer la dérivée de u_0 et en déduire le sens de variation de u_0.

2°) On définit alors par récurrence à partir de u_0 une suite de fonctions (u_n) définies sur **R** par :

$$u_n(x) = \phi u_{n-1}(x) \quad \text{c'est à dire} \quad u_n(x) = \int_{x-1}^{x} u_{n-1}(t)dt.$$

a) Calculer la dérivée de u_n et en déduire le sens de variation de u_n.
b) Déterminer le sens de variation de la suite $n \to u_n(x)$ lorsque le nombre réel x est fixé.
c) Etablir pour tout nombre réel x et tout nombre entier naturel n l'inégalité suivante :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \leq M^2.$$

d) En déduire que la suite $n \to u_n(x)$ converge vers 0, puis que f est constante sur **R**.

***