edhec

School of Management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 15 mai 2001, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On rappelle que l'ensemble $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des fonctions φ de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(*)$ suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = (1+x^2)\ \varphi(x)$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - v'u$ est une fonction constante.

3) Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par : $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

   a. Vérifier que f est élément de E.

   b. Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$.

   Montrer que g est élément de E

4) a. Soit h une solution de $(*)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f, que h est combinaison linéaire de f et de g.

   b. Montrer finalement que (f, g) est une base de E.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$.

On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $w_n = v_n - ln(n)$.

On rappelle que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

1) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geq 0$.

b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.

c. En déduire que, au voisinage de $+\infty$: $w_n - w_{n+1} = \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

2) a. Montrer que la série de terme général $(w_n - w_{n+1})$ est convergente.

b. En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.

3) Montrer que la série de terme général u_n converge.

4) a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \dfrac{1}{2} v_n - 1$.

c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = 24\,(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \dfrac{6n}{n+1}$.

5) En utilisant la convergence de la suite (w_n), calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln 2$.

Exercice 3

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $(\,.\, / \,.\,)$ défini par :
$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3,\ (u / u') = xx' + yy' + zz'$.
La norme du vecteur u est alors définie par $\| u \| = \sqrt{(u / u)}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire défini ci-dessus.

On désigne par a, b et c trois réels, on pose $\omega = (a, b, c)$ et on suppose que c est non nul.

On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $\varphi(u) = (yc - zb,\ za - xc,\ xb - ya)$.

1) Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

2) a. Vérifier que ω appartient à $\operatorname{Ker}\varphi$.

b. Montrer que $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est une famille libre.

c. Déduire des questions précédentes que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}(\omega)$.

3) a. Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, $(\varphi(u) / \omega) = 0$.

b. En déduire que : $\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp}$.

4) a. Justifier que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple (u_1, u_2) élément de $\operatorname{Ker}\varphi \times \operatorname{Im}\varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

b. Montrer que $(u / \omega) = (u_1 / \omega)$.

c. En déduire que $u_1 = \dfrac{(u / \omega)}{\|\omega\|^2}\,\omega$, puis déterminer u_2 en fonction de u et ω.

5) a. Montrer que $M^3 = -\|\omega\|^2 M$.

b. En déduire que : $\forall v \in \operatorname{Im}\varphi$, $\varphi \circ \varphi(v) = -\|\omega\|^2 v$.

c. Montrer finalement que : $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $\varphi \circ \varphi(u) = -\|\omega\|^2 u + (u/\omega)\,\omega$.

Problème

On désigne par n et r deux entiers naturels vérifiant : $n \geq 2$ et $r \geq 3$.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $R_1, R_2, ..., R_r$ de probabilités respectives $x_1, x_2, ..., x_r$. On admet que, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, $0 < x_i < 1$.
On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $[\![1, r]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1) a. Exprimer la variable X en fonction des variables $X_1, X_2, ..., X_r$.

b. Donner la loi de X_i pour tout i de $\{1, 2, ..., r\}$.

c. En déduire que l'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local.

2) a. Donner la valeur de $x_1 + x_2 + ... + x_r$ puis écrire $E(X)$ comme une fonction, que l'on notera f, des $(r-1)$ variables $x_1, ..., x_{r-1}$.
La fonction f est donc définie sur l'ouvert $(]0, 1[)^{r-1}$ de $\mathbb{R}^{r-1}$.

b. Montrer que f est de classe C^2 sur $(]0, 1[)^{r-1}$.

3) a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $R = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})$.

4) Déterminer la matrice M, élément de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(R)$.

5) On pose $A = I + J$, où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a. Montrer que J est diagonalisable.

b. Exprimer J^2 en fonction de J et r. En déduire que les valeurs propres de J sont 0 et $r-1$.

c. Montrer que le sous-espace propre de J associé à la valeur propre $r-1$ est de dimension 1.

d. Utiliser une base de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de J pour montrer que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P d'inverse ${}^tP$, telle que $A = PD\,{}^tP$ où D est la matrice de $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ dont les $(r-2)$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, celui de la $(r-1)^{\text{ème}}$ ligne étant égal à r.

6) a. Déduire des questions précédentes que pour tout H non nul de $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$, ${}^tHMH > 0$.

b. En posant ${}^tH = (h_1, h_2, \ldots, h_{r-1})$, exprimer ${}^tHMH$ en fonction des réels h_i et des dérivées partielles d'ordre 2 de f au point R.

c. En déduire que f présente un minimum local au point R.

d. Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.