Ecricome 2014

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Aucun document n'est autorisé. Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1)$$

On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f et $\mathrm{Im}(f)$ son image. Si λ est une valeur propre de f, on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Justifier que f n'est pas bijectif. En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de f.
3. Prouver que u et v sont deux vecteurs propres de f.
   Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à u (respectivement à v).
   Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ (respectivement $E_\mu(f)$).
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :

$$f(t) = t + v$$

6. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, telle que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 1,2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f$$

1. Montrer que :

   $$f \circ g = g \circ f$$

   En déduire que :

   $$f(g(u)) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = g(v)$$

2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
3. On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6. Justifier que :

   $$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

   où a et b sont les deux réels définis à la question précédente (II.2) et c, d, e des réels.
4. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$?
   Indication : Utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.
2. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.
3. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

   $$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

   puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.
7. Établir que :

$$\forall x \geqslant e-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ln(x+1) \geqslant (x+1)$$

   En déduire que :

$$\forall x \geqslant e-1, \quad f'(x) \geqslant 0$$

8. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leqslant u_n$$

9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

Exercice 3

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0;1[$. On note $q = 1-p$.

On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.

Partie I : Étude d'une première expérience

On procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: « *On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce* ».

On note :
- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : « La pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

« FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE »

alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Simulation informatique.
   (a) Écrire une fonction en Turbo-Pascal d'en-tête :

   ```
   function LANCER(p : real) : integer;
   ```

   qui crée un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1]$ et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à p et 0 sinon.

   (b) Écrire une fonction en Turbo-Pascal d'en-tête :

```
function PREMIER_PILE(p : real) : integer;
```

qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier PILE et renvoie le nombre de lancers effectués.

Indication : si on le souhaite, on pourra utiliser la fonction `LANCER` *en la répétant convenablement.*

(c) Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande un réel p à l'utilisateur, puis qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second PILE, et affiche le nombre de FACE obtenus en tout.

Indication : on pourra utiliser la fonction `PREMIER_PILE` *en la répétant convenablement.*

2. Soit n un entier naturel non nul. Donner la loi de X_n. Préciser la valeur de son espérance $E(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.
3. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
4. Donner les valeurs des probabilités :
$$P(Y=0), \quad P(Y=1) \quad \text{et} \quad P(Y=2)$$
5. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements :
$$(Y=n) \quad \text{et} \quad (X_{n+1}=1) \cap \overline{F_{n+2}}$$
sont égaux.
6. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y=n) = (n+1)p^2q^n$$
7. Vérifier par le calcul que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) = 1$$
8. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $E(Y)$ et donner sa valeur.
9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.
En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

Partie I : Étude d'une seconde expérience

On procède à l'expérience suivante :

$\mathcal{F}$: « *Deux joueurs se relaient pour effectuer des lancers successifs de la pièce pendant la pause déjeuner.*
Le joueur 1 arrive à 12h (considéré comme l'instant 0) et joue jusqu'à l'arrivée du joueur 2.
Le joueur 2 arrive au hasard entre 12h et 13h puis joue jusqu'à 13h (considéré comme l'instant 1). »

On note :

- R la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 1 ;
- S la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 2 ;
- T la variable aléatoire égale à la durée (en heure) de jeu effectuée par le joueur ayant joué le plus longtemps c'est-à-dire que :

$$T = \max(R, S)$$

Pour tout variable aléatoire X, on note F_X la fonction de répartition de X.

On admet que R et S sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant l'expérience $\mathcal{F}$. En outre, on suppose que :

$$\boxed{R \text{ suit la loi uniforme sur } [0; 1] \text{ et que } S = 1 - R}$$

(cette dernière relation traduisant que le temps total consacré au jeu par le joueur 1 et le joueur 2 est exactement d'une heure).

1. Expliciter la fonction F_R puis la fonction F_S. Reconnaître alors la loi suivie par la variable aléatoire S.
2. Pour tout réel t, prouver que :

$$P(T \leqslant t) = P\Big((R \leqslant t) \cap (R \geqslant 1 - t)\Big)$$

3. Déterminer, pour tout $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, l'expression de F_T en fonction de T.
4. Justifier que T suit la loi uniforme sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
5. En déduire que T admet une espérance $E(T)$ et une variance $V(T)$ que l'on précisera.