

EML 2006

voie Eco

Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
b) Déterminer une matrice inversible P telle que $A = P D P^{-1}$

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $A M = M D$

2. a) Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$
c) Etablir que (U, A) est une base de E .
d) Calculer le produit $U A$. Est-ce que $U A$ est élément de E ?
3. On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie , pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par :
 $f(M) = A M - M D$.
 - a) Vérifier que f est linéaire.
 - b) Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
 - c) Quelle est la dimension de l'image de f ?
 - d) déterminer les matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.
En déduire que 1 est valeur propre de f .
Montrer que -1 est aussi valeur propre de f .
 - e) Est-ce que f est diagonalisable ?
 - f) Montrer que $f \circ f \circ f = f$

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6)$$

1. a) Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F .
b) Est-ce que F présente un extremum local au point $(4, 2)$?
c) Est-ce que F présente un extremum local au point $(2, 3)$?
2. On note $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = x(x - 2)(2x - 5)$$

- a) Montrer : $\forall x \in [4; +\infty[$, $(x - 2)(2x - 5) \geq 4$
-

b) En déduire : $\forall x \in [4; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 4x$ et $\varphi(x) \in [4, +\infty[$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(1 + u_n, u_n)$$

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ .

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 4^{n+1}$

Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

c) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{10}$

4. On note $g : [4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4; +\infty[$, par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}$$

a) Montrer que l'intégrale $\int_4^{+\infty} g(x) dx$ converge.

b) Trouver trois réels a , b , c tels que

$$\forall x \in [4; +\infty[, g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5}$$

c) Calculer $\int_4^{+\infty} g(x) dx$

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$

a) Rappeler une densité de U

b) En utilisant la définition de la variance de U , montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} \forall x \leq 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f .

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Déterminer, pour tout réel y , la probabilité $P(X^2 \leq y)$. On distinguera les cas $y \leq 0$ et $y > 0$.

- c) Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En déduire que X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p .

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = p(1 - p)^{k-1}$

Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z .

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes Z_1, Z_2, \dots, Z_n , suivant toutes le loi géométrique de paramètre p .

on considère la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$.

- a) Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n

- b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$