EML 2005 voie Economique

Exercice 1

On considère les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

   a) Montrer, pour tout entier naturel n :

   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

   b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

   c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L , L^2 et n.

   On considère

   la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

   de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.

   Est-ce que f est diagonalisable ?

5. a) Soit $w = (1,0,0)$. Calculer $v = (f-e)(w)$ et $u = (f-e)(v)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u,v,w).

   c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge, et calculer cette intégrale.

   On distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$.
4. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(t)dt = \frac{1}{2}$.
5. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

   On considère la fonction φ_x définie sur $[0; +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[,\ \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)dt.$

   a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.

   b) Montrer : $\quad \forall (u, v) \in ([0, +\infty[)^2,\quad u < v \Longrightarrow \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)dt.$

   En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

   c) On admet que φ_x est continue sur $[0; +\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0; +\infty[$.

   On note $U : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0; +\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$.

   Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)dt = \frac{1}{2}$.
6. a) Vérifier, pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}[$: $\quad U(x) = 1 - x$.

   b) Pour tout $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$, montrer : $\quad \varphi_x(x) \geq \dfrac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geq 0$, et en déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.
7. a) Montrer que l'application U est continue sur $[0; +\infty[$.

   b) Etudier la dérivabilité de U sur $[0; +\infty[$

   c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.

   d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U.
8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U(a_n) \end{cases}$

   a) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

d) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leq 10^{-6}$$

Exercice 3

1. **Préliminaire :**

Soit $x \in]0;1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ de la façon suivante :

• pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n-ième succès ;

• T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n-ième succès après le $(n-1)$-ième succès.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer :
$E(S_n) = \dfrac{n}{1-x}$ et $V(S_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}$.

d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.

Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k)$?

e) En déduire, pour tout $x \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0;1[$), et la probabilité d'obtenir face est $q = 1 - p$.

Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.

b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

c) Montrer : $P(Y=0)=\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$.

d) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $P(Y=n)=\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}p^{n+1}q^{2k-n-1}$,

puis, en utilisant **1.e**, $P(Y=n)=\frac{1}{(1+q)^2}(\frac{q}{1+q})^{n-1}$