EDHEC eco 2011

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

1. a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\forall t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{e^t+1} \leq \dfrac{1}{2}$.
   b) Etablir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
   c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.
2. a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.
   b) Etudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$.
   b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E, associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = 2xP(x) - \left(x^2 - 1\right)P'(x).$$

1. a) Montrer que f est une application linéaire.
   b) En écrivant, pour tout réel x, $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.
   c) Ecrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. a) Vérifier que $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\operatorname{Im} f$.
   b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
3. a) A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.
   b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.
   c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\operatorname{Ker} f$, sont inclus dans $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".
   Ecrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \; P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

   b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

   c) Comparer $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j en sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.

   a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.

   b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

   a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

   b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

   c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec_2011 ;
Var x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
    Randomize ;
    Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
    Readln(n) ;
    n1 :=0 ; x1 :=1 ;
    For k :=1 to n do
    begin
        hasard := random(n)+1 ;
        if hasard = 1 then begin x1 :=-------- ; n1 := -------- ; end ;
    end ;
    Writeln(x1,n1) ;
End.
```

Problème

Notations et objectifs
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.
On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.
On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$.
L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P([X \leq x] \cap [Y = 1]) = P(X \leq x) P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P([X \leq x] \cap [Y = -1]) = P(X \leq x) P(Y = -1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

1. Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).
2. En utilisant le système complet d'événements $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples.

1. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.
2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.
   b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1. a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.
   c) Etablir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

   d) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

e) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

2. a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

   b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

3. a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

   b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

4. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

   a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

   b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.

   c) Informatique.

   En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en `Turbo Pascal` une déclaration de fonction dont l'entête est `function z :real ;` pour qu'elle simule la loi de Z.