EDHEC 2009 Option économique

Exercice 1

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie comme suit :
$f(0) = 1$, et pour tout x non nul de $]-\infty; 1[$, $\quad f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 1[$.
2. a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.

   b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
3. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.

   b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty; 1[$, puis en déduire les variations de f.

   c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0; 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

   b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 2

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0; 1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$.

   a) Pour tout entier naturel k, calculer $P(Z > k)$.

   b) Etablir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :
   $$P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k)$$

   c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.
2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
   Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
   On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

   b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

c) Exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction de certains événements $(X = i)$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

3. On rappelle que la fonction random renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0; 1[$.
Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant "*pile*" avec la probabilité p et calculer la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier "*pile*" obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
Program edhec2009 ;
Var x,t,lancer :integer ;
Begin
     Randomize ; x :=0 ;
     Repeat lancer :=random ; x :=...... ; until(lancer<=p) ;
     If(x mod 2=0) then .... else.... ;
     Writeln(t) ;
End.
```

Exercice 3

Dans tout l'exercice λ désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

a) En se référant éventuellement à une loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ puis donner sa valeur.

b) Montrer que h peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X.

c) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xh(x)dx$ puis donner sa valeur. En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

2. Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y de densité f, nulle sur $]-\infty; 0[$, continue sur $[0; +\infty[$ et strictement positive sur $[0; +\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de Y.
Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - F(x) > 0$.
On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. a) Montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $[0; +\infty[$.

c) en remarquant que, si l'on pose $u'(x) = -f(x)$, on peut choisir $u(x) = 1 - F(x)$, montrer grâce à une intégration par parties que $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ est une intégrale convergente et que $\int_0^{+\infty} g(x)dx = 1$.

d) Etablir que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Z.

e) Etude d'un cas particulier.
Vérifier que la variable aléatoire Y suivant la loi exponetielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) vérifie les conditions imposées dans la deuxième question. Montrer alors que Z suit la même loi que X.

Problème

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice A de f relativement à la base (e_0, e_1, e_2).
3. a) Etablir que f est un automorphisme de E. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.
   b) Ecrire la matrice de f^{-1} relativement à la base (e_0, e_1, e_2).
4. a) Déterminer la seule valeur propre λ de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   b) Préciser le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Partie 2

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et Id l'endomorphisme identité de F. On considère l'application g qui, à toute fonction u de F, associe $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u.

1. Montrer que g est un endomorphisme de F.
2. Dans cette question, on se propose de déterminer $\ker(g - 6Id)$. On considère donc une fonction u élément de $\ker(g - 6Id)$.
   a) Montrer que la fonction j, définie par tout réel x par $j(x) = u'(x)\,e^{-5x}$ est constante.
   b) En déduire que $\ker(g - 6Id) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et u_2 la fonction définie pour tout réel x par $u_2(x) = e^{5x}$.

   On se propose, dans les trois questions suivantes de déterminer $\ker(g)$. On considère donc u une fonction de $\ker(g)$.
3. On pose $v = u' - 2u$.
   a) Montrer que $v' = 3v$.

b) En déduire que la fonction h, définie pour tout réel x par $h(x) = v(x)e^{-3x}$, est constante.

c) Conclure qu'il existe un réel α tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v(x) = \alpha e^{3x}$.

4. On pose $w = u' - 3u$.

a) Montrer que $w' = 2w$.

b) En déduire que la fonction k, définie pour tout réel x par $k(x) = w(x)e^{-2x}$, est constante.

c) Conclure qu'il existe un réel β tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = \beta e^{2x}$.

5. a) Montrer, en utilisant les deux questions précédentes, que $\ker(g) = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$, où les fonctions u_3 et u_4 sont définies pour tout réel x par $u_3(x) = e^{3x}$ et $u_4(x) = e^{2x}$.

b) Montrer enfin que dim(Ker(g))=2