EDHEC 2008 Eco

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction $f_{\,,,}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x$.

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité 5 cm.

1. a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f''(x)$.

   b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$.

   b) Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx+1$ sont asymptotes de (C_n)

   c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n).

   d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1, puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).

3. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

   b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.

   c) En déduire la limite de la suite (u_n)

   d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.

Exercice 2

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer la matrice $A(A-2I)^2$ et en déduire les seules valeurs propres possibles de f :

   b) On considère les vecteurs $u = (2,1,-2)$ et $v = (3,1,-2)$.
   Déterminer $f(u)$ et $f(v)$ puis en déduire les valeurs propres de f :

   c) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

2. On considère le vecteur $w = (-2,0,1)$

   a) Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Exprimer $f(w)$ comme combinaison linéaire de v et w puis vérifier que la matrice de f dans la base (u,v,w) est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   c) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

3. a) On pose $T = D+N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Déterminer N^2 puis utiliser la formule du binôme pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n

c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1}.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$

e) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$ est convergente et donner sa valeur

2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

   a) Montrer que f est paire.

   b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ admettant f comme densité.
On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

   a) Déterminer $Y(\Omega)$

   b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

   c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Problème

Partie 1 : préliminaires

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

   a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0,1]$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0, n-1]],\ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right],\ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$

   c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0, n-1]]$,

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}$$

d) En sommant la relation précédente, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}$

e) Conclure finalement que $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,dt$.

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx$

   a) Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1,q-1)$.

   b) En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$.

   c) Déterminer$I(p+q,0)$ et montrer finalement que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3. Informatique.
   Compléter la déclaration récursive suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p,q)$:

```
Function i(p, q : integer ) : real ;
Begin
If q = 0 then i :=...... else ...... ;
End ;
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$
On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[[0, n-1]]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left(U_n = \dfrac{k}{n}\right)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \dfrac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$
2. Donner la loi de X_1

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathrm{P}(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   b) Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$.

   Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\dfrac{m(n-1)}{2n}$

c) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} i\,(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$

Montrer alors que l'espérance de $X_n\,(X_n-1)$ est égale à $\dfrac{m\,(m-1)\,(n-1)\,(2n-1)}{6n^2}$.

d) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\dfrac{m\,(m+2)\,(n^2-1)}{12n^2}$

4. a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout i de $X_n\,(\Omega)$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\,(X_n=i)$.

b) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

c) Vérifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E\,(X_n)=E\,(X)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(X_n)=V(X)$.