EDHEC 2007
OPTION : ÉCONOMIQUE
MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Pour toute matrice M élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M, définie de la façon suivante : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + {}^tM$.

1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Ecrire la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$.
   c) En déduire que φ est diagonalisable et non bijectif.
2. calculer A^2 et en déduire que , pour tout n de$\mathbb{N}^*$: $A^n = 2^{n-1}A$
3. a) Montrer que $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}(E_1,\ E_2 + E_3,\ E_4)$, puis établir que $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 3$.
   b) En déduire la dimension de $\ker\varphi$ puis déterminer une base de $\ker\varphi$.
   c) Etablir que $\mathrm{Im}\varphi$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 2
   d) Donner ,pour résumer, les valeurs propres de φ ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Exercice 2

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité , définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathrm{P}([U = -1] \cap [X \geq -x])$$

   b) En déduire que Y suit la même loi que X.
2. a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$
   b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
3. a) Rappeler la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$

b) Montrer, grace à une intégrationpar parties que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ : \quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

d) Etablir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E\left(X^4\right) = 3$

4. a) Vérifier que $E\left(X^2 Y^2\right) = 3$

   b) Déterminer $\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right)$

   c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

   d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variabales à densité. Lequel ?

Exercice 3

1. a) Montrer que pour tout $x > 0 : x - \ln(x) > 0$

   b) On pose alors $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

   Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

2. a) Montrer que f est continue sur D.

   b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

3. a) Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.

   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   c) Dresser le tableau de variations de f.

4. Etudier le signe de $f(x)$.

5. Pour tout réel x élément de D, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

   a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D puis étudier ses variations.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.

   c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t} dt$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ ..

Problème

On lance une pièce équilibrée. (la probabilité d'obtenir "pile" et celle d'obtenir "face" étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées 1, 2, $\cdots$, k, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement $\ll$obtenir un "pile"$\gg$ par 1 et l'événement $\ll$obtenir un "face"$\gg$ par 0.

   On rappelle que la fonction `random` renvoie, pour un argument k de type `integer` (où k désigne un entier supérieur ou égal à 1) un entier aléatoire compris entre 0 et $k - 1$.

a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
Program edhec_2007 ;
Var z,hasard :integer ;
begin
    randomize ; z :=0 ;
    repeat
        z :=........ ; hasard :=........ ; until (hasard=1) ;
    writeln(z) ;
end.
```

b) Quelle instruction faut-il rajouter avant la dernière ligne de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

2. Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

3. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

4. a) Pour tout couple (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathrm{P}_{[Z=k]}(X=i)$

b) En déduire que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(X=i) = \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

c) On admet dans cette question que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=i}^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}$. Vérifier que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=i) = 1$

5. a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\mathrm{P}(X=i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$

b) En déduire que X possède une espérance.

c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4c), que

$$E(X) = \frac{3}{2}$$

6. a) Utiliser le résultat de la question 5a) pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

b) Etablir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4c), que

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

d) En déduire la valeur de $E\left(X^2\right)$ et vérifier que $V(X) = \dfrac{11}{12}$.

7. a) Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, pour la variable X.

b) En déduire $\mathrm{P}(X \geq 3) \leq \dfrac{11}{27}$

8. On se propose de calculer $\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(X=2)$ et $\mathrm{P}(X \geq 3)$.

a) Ecrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx$

d) Etablir alors que $\mathrm{P}(X = 1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $\mathrm{P}(X = 2)$.

e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathrm{P}(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $\mathrm{P}(X \geq 3)$ en prenant $\ln 2 \simeq 0,7$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la septième question ?