## Exercice 1

Pour tout nombre réel $x$, on note $[x]$ la partie entière de $x$, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leqslant x < [x] + 1$.
Soit $X$ la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = [X]$, $Y$ est donc la partie entière de $X$ et on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (Y = k) = (k \leqslant X < k+1)$

**1.** **a)** Montrer que $Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

**b)** Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.

**c)** En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

**d)** Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de $Y$.

**2.** On pose $Z = X - Y$.

**a)** Déterminer $Z(\Omega)$.

**b)** En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

**c)** En déduire une densité $f$ de $Z$.

**d)** Déterminer l'espérance $E(Z)$ de $Z$. Ce résultat était-il prévisible ?

## Exercice 2

On désigne par $n$ un entier naturel non nul.
On lance $n$ fois une pièce de monnaie donnant " pile " avec la probabilité $p$ (avec $0 < p < 1$) et " face " avec la probabilité $q = 1-p$. On appelle $k$-chaîne de " pile " une suite de $k$ lancers consécutifs ayant tous donnés " pile ", cette suite devant être précèdée d'un "face" ou débuter le tirage, et suivie d'un " face " ou être la dernière suite du tirage.
Pour tout $k$ de $[[1,n]]$ on note $Y_k$ la variable aléatoire égale au nombre total de $k$-chaînes de " pile " obtenues au cours des $n$ lancers.
Pour tout $k$ de$[[1,n]]$, on pourra noter $P_k$ l'événement " on obtient " pile " au $k^{eme}$ lancer ".
Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1P_2F_3F_4P_5P_6P_7F_8P_9F_{10}P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout $k$ de $[[1,n,]]$ l'espérance de $Y_k$, notée $E(Y_k)$.

**1.** Déterminer la loi de $Y_n$ et donner $E(Y_n)$.

**2.** Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$. et donner $E(Y_{n-1})$.

**3.** Dans cette question, $k$ désigne un entier de$[[1,n-2]]$

Pour tout $i$ de $[[1,n]]$ on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une $k$-chaîne de " pile " commence au $i^{eme}$ lancer et qui vaut 0 sinon.

**a)** Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.

**b)** Soit $i \in [[2, n-k]]$ . Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.

**c)** Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.

**d)** Exprimer $Y_k$ en fonction des variables $X_{i,k}$, puis déterminer $E(Y_k)$.

**Exercice 3**

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{-x \ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

**1.** **a)** Vérifier que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

**b)** Etudier le signe de $f(x)$.

**2.** Montrer que l'on définit bien une fonction $F$ sur $\mathbb{R}^+$, en posant:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$$

**3.** Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^+$, on pose : $g(x) = F(x) - x$.

**a)** Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme

$$g'(x) = \frac{-xh(x)}{1+x^2}$$

**b)** Etudier les variations de $h$, puis en déduire son signe (on donne $\ln \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq -0,48$).

**c)** En déduire le signe de $g(x)$.

**4.** On définit la suite $(u_n)$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_{n+1} = F(u_n)$

**a)** Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0,1]$.

**b)** Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que $(u_n)$ est décroissante.

**c)** En déduire que la suite $(u_n)$ converge et donner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**Problème**

**Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.**

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $E$ l'ensemble des matrices $M$ s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où $a$, $b$, $c$ et $d$ décrivent $\mathbb{R}$.

**1.** **a)** Montrer que $E$ est un espace vectoriel.

**b)** Montrer que la famille $(I, J, K, L)$ est libre.

**c)** Donner la dimension de E.

**2.** **a)** Montrer, en les calculant explicitement, que $J^2$, $K^2$, $L^2$, $J^3$ et $L^3$ appartiennent à $E$.

**b)** En déduire, sans aucun calcul matriciel, que $JK$, $KJ$, $KL$, $LK$, $JL$ et $LJ$ appartiennent aussi à $E$.

**c)** Etablir enfin que le produit de deux matrices de $E$ est encore une matrice de $E$.

**3.**

**a)** Montrer que $L$ est diagonalisable.

**b)** Déterminer les valeurs propres de $L$ ainsi que les sous-espaces propres propres associés à ces valeurs propres.

**4.** On considère les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Montrer que $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

**b)** Vérifier que $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$ sont des vecteurs propres de $L$ et $J + K$.

**Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.**

Dans cette partie, $p$ désigne un réel de $[0, 1[$.
Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.
Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin( relié par un côté) avec la probabilité $p$ ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note $X_n$ la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant $n$. On a donc $X_0 = 1$.

**1.** **a)** Ecrire la matrice $A$, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i \ / \ X_n = j)$.

**b)** Vérifier que $A$ s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et $L$.

**2.** **a)** Pour tout $i$ de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer $Au_i$. En déduire qu'il existe une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter $D$ et $P$.

**b)** Calculer $P^2$ puis en déduire $P^{-1}$.

**3.** Pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

**a)** Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = AC_n$.

**b)** En déduire que $C_n = \dfrac{1}{4} P D^n P C_0$, puis donner la loi de probabilité de $X_n$ pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1.