EDHEC
CONCOURS D'ADMISSION 2000
Mathématiques
Option économique

Exercice 1

1. Déterminer l'ensemble D des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.
   On définit la fonction f par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.
   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. (a) Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D.
   (b) En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α.
   (c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.
3. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.
   (b) En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
   (c) Donner la position relative de (Δ) et (C).
4. Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).
   On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{\alpha} \simeq 2,2$.
5. Soit λ un réel, on note g_λ la fonction définie par : $\begin{cases} g_\lambda(x) = 0 & \text{si } x < \alpha \\ g_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$.
   (a) On pose $h(x) = f(x) - x$. Après avoir calculer $h'(x)$, déterminer λ en fonction de α pour que g_λ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
   (b) Donner la fonction de répartition G_λ de X.

Exercice 2

Soit la matrice $K = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
   (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.
2. Soit $M = \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{matrix}$ une matrice de E.
   (a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E.
   (b) Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.
   (c) Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.
3. On considère l'ensemble F des mtrices de la forme $M = \begin{matrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{matrix}$ où x, y et z sont des réels.

(a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.

(b) Les matrices de F sont-elles diagonalisables ?

(c) Dans cette question on appelle U la matrice de F telle que : $x = 3$, $y = 2$ et $z = 4$.
Trouver les valeurs propres de U et exhiber un vecteur colonne propre pour chacune d'entre elles.

4. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de F associe le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j}$, où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne.

(a) Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$. En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension 2.

(c) Soit $M = \begin{matrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{matrix}$ une matrice de $\operatorname{Ker}\varphi$.
Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y et z et en déduire une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
   (b) Calculer u_1 et u_2.
   (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. (a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Donner enfin la valeur de ℓ.
4. Montrer que la série de terme général $\dfrac{2}{3} - u_n$ est convergente.

Problème

On lance indéfiniment une pièce donnant *"Pile"* avec la probabilité p et *"Face"* avec la probabilité $q = 1 - p$.
On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : *"on obtient Pile (resp. Face) au $k^{ième}$ lancer"*.
Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie 1 : étude de quelques exemples.

1. Donner la loi de X_2.
2. (a) Donner la loi de X_3.
   (b) Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. (a) Trouver la loi de X_4.
   (b) Calculer $E(X_4)$.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$. Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.
2. En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que $P(X_n = 1) = \dfrac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right)$.
3. En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n - 1)$ en fonction de p et q.
4. Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4.
5. Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{ième}$ lancer est un changement et 0 sinon (Z_k est donc une variable de Bernouilli).
   Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k et en déduire $E(X_n)$.

Partie 3 : étude du cas $p = q$.

1. Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binômiale.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, X_n suit une loi binômiale dont on donnera les paramètres.